Historische Studie über Ernst Machs Darstellung der Entwicklung des Hebelsatzes

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Bonn

von

Dora Reimann

aus Berlin

Berlin 1936

Berichterstatter: Professor Dr. Konen
Professor Dr. Toeplitz

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus der Zeitschrift
„Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik", Abteilung B,
Bd. III, Heft 4, S. 554—592
Verlag J. Springer in Berlin

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546416_0039

Historische Studie über Ernst Machs Darstellung der Entwicklung des Hebelsatzes*).

Von Dora Reimann (Berlin).

(Eingegangen 3. 8. 1936.)

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 554
§ 1. Pseudo-Aristoteles 558
§ 2. Die Pseudo-Euklidischen Mechanik-Schriften 560
§ 3. Leonardo da Vinci 564
§ 4. Guido Ubaldo 567
§ 5. Stevin 576
§ 6. Galilei 579
§ 7. Huygens 581
§ 8. Lagrange 587
Zusammenfassung 591

Einleitung.

Ernst Mach hat mit seinem Buch „Die Mechanik in ihrer Entwicklung“ auf eine dem Geschichtlichen wenig zugeneigte Generation von Mathematikern und Naturwissenschaftlern eine außerordentliche Anregung ausgeübt. Er beginnt in diesem Werk mit der Geschichte des Hebelprinzips. Nach einer Vorbemerkung über die μηχανικὰ προβλήματα des Aristoteles betrachtet er den Beweis, den Archimedes für den Hebelsatz gibt, und vergleicht dann die Stellungnahme einer Reihe von späteren Autoren zum Hebelsatz mit der des Archimedes. Gegen dessen Beweisgang erhebt er einen schweren Vorwurf. Archimedes habe in seiner „griechischen Beweissucht“ (Mach S. 18)[1]) und in „falscher und verkehrter Strenge“ (S. 72) den allgemeinen Hebelsatz aus der Erfahrungstatsache des speziellen Falles gleicher Gewichte in gleichen Abständen vom Unterstützungspunkt beweisen wollen,

*) Diese Arbeit hat im Juli 1932 der philosophischen Fakultät Bonn als Dissertation vorgelegen. Den Herren E. Bessel-Hagen, H. Konen und O. Toeplitz bin ich für Anregungen und Ratschläge zu größtem Dank verpflichtet.

[1]) Ich zitiere die Seitenzahlen der 7. Auflage von 1912, da diese am weitesten verbreitet ist. Die 8. Aufl. von 1921 ist nur ein sachlich unveränderter Abdruck der 7. Auflage. W. Stein[3]) hat nach der 4. Aufl. von 1901 zitiert. Nach Abfassung der vorl. Arbeit ist eine 9. Aufl. 1933 erschienen.

während man nicht ohne weitere Zusatzannahmen auskomme, die als instinktive Erfahrungstatsachen hinzuzunehmen seien. Er sagt ferner: „Die gleichgewichtstörende Wirkung eines Gewichtes" werde als statisches Moment „mehr oder weniger versteckt oder stillschweigend eingeführt" (S. 14). „Die ganze Ableitung enthält den zu beweisenden Satz, wenn auch nicht ausdrücklich ausgesprochen und in anderer Form, schon als Voraussetzung" (S. 15). Mach sagt, Archimedes habe stillschweigend folgenden Hilfssatz benutzt: „Die Wirkung zweier gleicher Gewichte" ist „unter allen Umständen gleich der Wirkung des doppelten Gewichtes mit dem Angriffspunkt in der Mitte" (S. 14)[2]).

In Wahrheit hat Archimedes selbst die Postulate, die er für seinen Beweis braucht, genau formuliert und dem Ganzen vorangestellt. W. Stein hat in seiner Dissertation diese Postulate und die darauf gegründeten Beweise des Archimedes genau analysiert und festgestellt, daß sie alles enthalten, was zu jenen Beweisen logisch notwendig ist[3]). (Wenn auch Stein von „stillschweigenden Annahmen" des Archimedes redet, so sind diese von ganz harmloser Natur, nämlich entweder Aussagen, die Archimedes selbst in anderen seiner Werke explizite formuliert hat, oder so geartet, wie sie auch Euklid in seinen Elementen nicht zu formulieren pflegt und die zu formulieren also nicht damaliger Stil gewesen zu sein scheint.) Natürlich muß man die Art kennen, wie griechische Mathematiker die von ihnen vorangeschickten Axiome benutzen, ohne, wie wir es zu tun pflegen, deren Nummer ausdrücklich zu zitieren. Hält man sich dies gegenwärtig, so bemerkt man, in welcher Weise Archimedes seinen Hebelbeweis insbesondere auf das sechste seiner Postulate stützt: P_6 „Wenn Größen in irgend welchen Abständen im Gleichgewicht sind, so sind ihnen gleiche in denselben Abständen ebenfalls im Gleichgewicht".

[2]) Duhem hat diesen Hilfssatz in der an Mach anschließenden Darstellung seines Standardwerkes „Les origines de la statique", Paris I 1905, II 1906 (von mir zitiert als Duhem I, II) unglücklicherweise als „Archimedisches Axiom" (I, S. 356) bezeichnet (während er von den Postulaten 5—7, die Archimedes in Wirklichkeit benutzt, sagt I S. 10, sie seien von zu großer Evidenz, als daß es nötig wäre, sie aufzuzählen), ein Name, der vielfach in nicht minder mißglückter Weise für etwas anderes, nämlich das sogenannte Stetigkeitsaxiom, verwendet wird, von dem Archimedes selbst sagt, daß er es aus einer Arbeit des Eudoxos übernommen habe.

[3]) W. Stein „Der Begriff des Schwerpunktes bei Archimedes", Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abtlg. B Bd. 1, Heft 2, Berlin 1930, S. 221—244. Der in Frage kommende Archimedestext ist dort wörtlich übersetzt. Ich bringe deshalb die Wortlaute nicht, sondern verweise dafür stets auf die Arbeit von Stein. — Wie mir Herr Toeplitz während des Druckes dieser Arbeit mitteilt, hat er in Kopenhagen erfahren, daß C. Juel schon 1914 in einer dänisch geschriebenen Abhandlung (Kgl. Danske Vid. Forh. Nr. 5—6, p. 421—441) im Anschluß an Vailati (vgl. Stein S. 230[3]) auf den Fehler von Mach und Hölder[48]) hingewiesen hat, ohne jedoch die Interpretation von P_6 und die ganze systematische Analyse von Stein zu vollziehen.

Dieser Wortlaut bedarf allerdings, wenn man ihn außerhalb des ganzen bei Stein gegebenen Textzusammenhanges betrachtet, einiger Erläuterung, ehe erörtert werden kann, in welcher Weise das „Archimedische Axiom", von dem Mach behauptet, es werde an der fraglichen Stelle des Hebelbeweises stillschweigend benutzt, sich P_6 als Spezialfall einordnet. Es ist das Ergebnis der Steinschen Arbeit, daß die Wortlaute dieser Archimedischen Postulate P_1 bis P_7 von Archimedes selbst nicht in dem naiven Sinne gemeint sind, wie sie in der Folge oft verstanden wurden. Schon P_1:

„Gleiche Gewichte in gleichen Abständen sind im Gleichgewicht."

besagt nicht nur, daß zwei einzelne gleichschwere und starr mit einander verbundene Massenpunkte bezüglich des Mittelpunkts ihrer Verbindungsstrecke als Unterstützungspunkt im Gleichgewicht sind; sondern es besagt, wie der Gebrauch, den Archimedes davon macht[4a]), unzweideutig lehrt: Sind zwei starre und starr mit einander verbundene Massensysteme von gleicher Gesamtmasse mit den Schwerpunkten S_1 und S_2 gegeben, so besteht Gleichgewicht, wenn man das aus beiden Massensystemen vereinigte System im Mittelpunkt der Verbindungsgeraden $S_1 S_2$ unterstützt[4b]).

Ebenso besagt P_6: Wenn zwei starre und starr mit einander verbundene Massensysteme mit den Schwerpunkten S_1, S_2 im Gleichgewicht sind, so sind ihnen massengleiche Massensysteme mit denselben Schwerpunkten (d. h. „in denselben Abständen" vom Unterstützungspunkt) ebenfalls im Gleichgewicht. Während nun Archimedes P_6 an drei Stellen seiner Werke in dieser vollen Allgemeinheit benutzt[4a]), gebraucht er beim Beweise des Hebelsatzes nur den speziellen Fall, wo das eine der beiden Massensysteme aus zwei gleichen Massen besteht, deren Schwerpunkt also in ihrer Mitte S_1 gelegen ist, und das ihm massengleiche System aus der doppeltsoschweren, in S_1 angebrachten Masse besteht, während das andere Massensystem mit dem Schwerpunkt S_2 durch sich selbst ersetzt wird: „Enthält ein im Gleichgewicht befindliches Massensystem zwei gleiche Massen, so bleibt das Gleichgewicht bestehen, wenn man diese beiden durch die doppeltsogroße in ihrem Mittelpunkt angebrachte Masse ersetzt."

Dieser „Spezialfall von P_6" ist mit dem „Archimedischen Axiom",

[4a]) Aus den Indices, die Stein am Ende seiner Arbeit aufstellt, findet man leicht die sämtlichen Stellen, an denen Archimedes irgendeines seiner Postulate benutzt hat, und bestätigt daraus das oben Gesagte.

[4b]) Um den Sachverhalt nicht noch mehr zu komplizieren, beschränken wir uns auf den Fall des indifferenten Gleichgewichts (vgl. Stein S. 228). — Wenn der Gebrauch, den Archimedes von seinen Postulaten bei seinen Beweisen macht, zu dieser weiten Interpretation derselben zwingt, so folgt daraus, daß er sich hier der Form der expliziten Definition nicht bedient hat. Vgl. dazu § 4 (Ubaldo), S. 571.

wie es Mach formuliert hat, nicht schlechthin identisch. Das Wort „Wirkung", das Mach hineingesetzt hat, gibt dem Axiom eine Wendung, deren positive Bedeutung im folgenden, etwa bei Lagrange, hervortreten wird; in seiner Unbestimmtheit hebt es sich aber sehr deutlich von der konkreten Präzision des Archimedes ab. Sieht man von diesem Unterschied der Formulierung ab, so ist also im Archimedestext alles aufgewiesen, was darin vermißt worden ist.

Woran Mach sich offenbar gestoßen hat, das ist die Darstellungsform des Archimedes, der die Motive, die ihn zur Auffindung seiner Beweise geführt haben, nicht niederschreibt. Mach stellt sich vor, daß Archimedes dort, wo man instinktiver Erfahrungstatsachen bedarf, voraussetzungslose Beweise habe führen wollen; und da dies unmöglich sei, habe er die nötigen Voraussetzungen hineingeheimnißt. Mach übersah, daß Archimedes seine Entdeckungen geflissentlich nicht so, wie er sie fand, sondern in der kunstvollen Form Euklids dargestellt hat, und daß er sie erst dann veröffentlicht hat, wenn er ihnen diese Form zu geben vermochte.

Da Mach selbst in erster Reihe Naturphilosoph ist, und da die Größe seiner naturphilosophischen Konzeption auch seinen historischen Forschungen weitreichende Beachtung und großen Einfluß unter Naturwissenschaftlern und Mathematikern geschaffen hat, erscheint es interessant, die ganze Betrachtung Machs über die Geschichte des Hebelsatzes in ihrem historischen Wert einer genauen Analyse zu unterziehen. Diese Analyse erhält dadurch einen besonderen Reiz, daß sie erkennen läßt, wie charakteristisch verschieden die einzelnen Autoren, die Mach zur Geschichte der Ableitung des Hebelsatzes heranzieht, zu diesem Problem Stellung nehmen. Es wäre überhaupt eine anziehende Aufgabe, auch über die von Mach zitierten Autoren hinaus eine systematische Geschichte des Hebelsatzes durch alle Zeiten bis herab zu den Werken von Dühring, Gerland, Zeuthen, Wohlwill etc. zu geben. Dies hätte aber den hier gespannten Rahmen weit überschritten. Ich habe mich also in der Hauptsache darauf beschränkt, für jeden einzelnen der von Mach beim Hebelsatz erwähnten Autoren der Reihe nach den Urtext zu übersetzen, seine Stellung zum Hebelsatz zu analysieren und dann festzustellen, wie weit Machs Darstellung exakt und historisch richtig ist. Das Gesamtergebnis ist in dem Schlußparagraphen zusammengefaßt [5]).

[5]) Die Figuren sind aus den Originalwerken in z. T. verkürztem Maßstab, aber geometrisch ähnlich abgezeichnet. Nur die Figur im Kapitel Lagrange stammt von mir und dient zur Veranschaulichung der von Lagrange in Worten gegebenen Betrachtung.

§ 1. Pseudo-Aristoteles.

Die unter dem Namen des Aristoteles überlieferte Schrift „μηχανικὰ προβλήματα“ (Mechanische Probleme)[6]) hat dank seiner Autorität im Mittelalter großen Einfluß gehabt. Es gilt jetzt als festgestellt, daß sie nicht von Aristoteles selbst stammt[7]). Heiberg[8]) nennt das Werk „eine bunte Sammlung von Problemen von höchst ungleichem Wert“. Duhem[9]) dagegen beurteilt den Verfasser der „Mechanischen Probleme“ sehr positiv. Für ihn ist dieser Autor ein hervorragender Vertreter der instinktiven Methode, die zwar im einzelnen vieles falsch machen kann, aber durch Aufstellung allgemeiner Prinzipien und Erkenntnisse die Wissenschaft außerordentlich fördert.

Die pseudoaristotelische Schrift enthält eine eingehende Auseinandersetzung mit dem Hebelsatz. Sie ist von ganz anderer Art als die des Archimedes; sie enthält eine Reihe von ganz anderen Begriffen und eine Reihe von Dunkelheiten, ist überhaupt mehr qualitativ als quantitativ. Aber sie hat auf die spätere Entwicklung einen so sichtbaren Einfluß ausgeübt, daß der Leser von dieser keinen richtigen Eindruck gewinnen kann, wenn er nicht die Stelle aus Pseudo-Aristoteles kennt. Sie sei deshalb mit ihren Figuren genauer geschildert.

Pseudo-Aristoteles bedient sich dabei des Begriffs der Geschwindigkeit. „Schneller“, sagt er, „wird in zweifachem Sinne gesagt; wenn nämlich in kleinerer Zeit derselbe Weg zurückgelegt wird, sagen wir schneller, und auch, wenn in derselben Zeit ein größerer Weg“.

Nach einer ziemlich langen und dunklen Ableitung wird das Prinzip ausgesprochen, daß bei Anwendung gleicher Kraft das Gewicht, das weiter vom Mittelpunkt entfernt ist, bei Bewegung um diesen Punkt sich schneller bewegt. Es wird dann (Bekk. 850a) der gleicharmige Wagebalken behandelt (gleiche Gewichte in gleichen Abständen vom Unterstützungspunkt bei kontinuierlicher Massenverteilung).

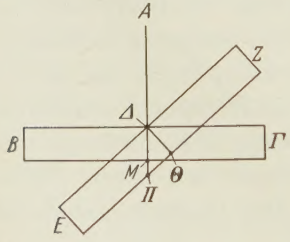

Fig. 1.

1. Der stabile Fall (Aufhängung in Δ oberhalb des Gesamtschwerpunktes). Zuerst herrscht Gleichgewicht für BΓ (also Archimedes P_1). Wird in B ein Übergewicht aufgelegt, so sinkt der Wagebalken auf dieser Seite bis E (also P_2). Nach Wegnahme des Übergewichtes in E muß nun umgekehrt Z sinken, bis wieder Gleichge-

[6]) ed. Otto Apelt, Leipzig 1888.

[7]) Pauly-Wissowa, Realenzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaften, II_1, S. 1044. Berichterstatter: Gercke.

[8]) Handbuch der Altertumswissenschaften, V, 1. Abt. 2. Hälfte, 1925.

[9]) Duhem I und II.

wicht für BΓ eintritt, da jetzt automatisch ZΔΠ mehr als die Hälfte beträgt. (Also P_2 und P_1).

2. Der indifferente Fall (Unterstützung im Gesamtschwerpunkt) wird nicht behandelt. Guido Ubaldo[10]), ein großer Verehrer des Aristoteles, sagt 1577 zur Erklärung, es sei eine Gewohnheit des Aristoteles, sehr bekannte Dinge mit Schweigen zu übergehen.

3. Der labile Fall (Unterstützung in Λ unterhalb des Gesamtschwerpunktes). Es herrscht Gleichgewicht für NΞ (also P_1). Wird in N das Übergewicht aufgelegt, so sinkt der Wagebalken auf dieser Seite bis O (also P_2). Wird nun das Übergewicht in O abgenommen, so richtet sich der Wagebalken nicht wieder auf, sondern bleibt in dieser Lage, da automatisch das Stück OΛK mehr als die Hälfte beträgt (also P_2). Die physikalische Notwendigkeit, daß der Wagebalken völlig umkippt, wird nicht erkannt. Vielleicht hat Guido Ubaldo recht, wenn er diese Stelle so erklärt: Die Unterstützung MΛ sei körperlich gedacht, also könne der Wagebalken nur so weit kippen, bis OΛ sich an MΛ anlehne. Der Fall gleicher Gewichte in gleichen Abständen vom Unterstützungspunkt ist erledigt.

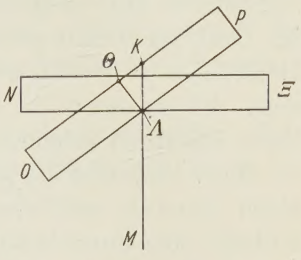

Fig. 2.

Nun wird zu einer Figur des allgemeinen Hebelfalles (Bekk. 850a 30) das qualitative Prinzip einer schnelleren Bewegung bei größerem Abstande vom Unterstützungspunkt noch einmal festgestellt. Dann folgt ziemlich unvermittelt die quantitative Aussage: „Wie nun das bewegte Gewicht zu dem bewegenden, so entspricht sich umgekehrt die Länge zur Länge".

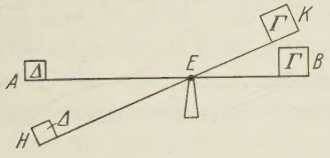

Fig. 3.

Guido Ubaldo gibt trotz seiner Verehrung für Aristoteles zu, daß diese Betrachtungen nur qualitativ seien; erst Archimedes habe einen quantitativen Beweis erbracht. Duhem[11]) glaubt, diese Ableitung als eine quantitative retten zu können mit Hilfe eines Prinzips, das Aristoteles an anderer Stelle ausspricht[12]): „Die Geschwindigkeit des kleineren verhält sich zu der des größeren wie der größere Körper zum kleineren." Allerdings sei Aristoteles kein Geometer gewesen und habe es nicht vermocht, aus diesem Prinzip mit aller Strenge die möglichen Konsequenzen zu ziehen. Auch sei die große Schwierigkeit dieses Prinzips, das späterhin vom Verfasser des Charistion, von Thabit

[10]) S. auch unten § 4: Guido Ubaldo.
[11]) Duhem I S. 5—9, S. 122 und II S. 291 ff.
[12]) De Coelo Γ 2 Bekk. 301 b 11—13.

ibn Qurra und vielen anderen arabischen Schriftstellern angewendet wurde, daß das Gewicht des Körpers, also die Kraft, vertikal wirke, während die Bewegung auf einer Kreisperipherie vor sich gehe. Einen großen Fortschritt stelle dann um 1200 Jordanus Nemorarius dar mit dem Prinzip: „Was ein gewisses Gewicht auf eine gewisse Höhe heben kann, kann auch ein k mal so großes Gewicht auf eine k mal so kleine Höhe heben." —

Es mag dahingestellt bleiben, ob der quantitative Standpunkt Pseudo-Aristoteles noch fremd und erst Archimedes eigen war. Jedenfalls unterscheiden sie sich darin: Archimedes arbeitet rein statisch, Aristoteles mit ausgesprochen dynamischen Prinzipien. Wir werden im Lauf der Arbeit sehen, daß viele Physiker durch diese dynamische Denkweise, so produktiv sie auch für die Physik war, gehindert wurden, die axiomatische Grundlegung der Statik durch Archimedes in ihrer Exaktheit erkennen und würdigen zu können.

Mach bespricht die pseudoaristotelische Schrift nur kurz. Er druckt einen Auszug aus Poselgers Übersetzung (Hannover 1881) ab und schließt eine kurze Würdigung der gesamten Schrift an; die oben referierten Einzelheiten zum Hebelgesetz berührt er nicht. Mach hat mit seinem Urteil über die μηχανικὰ προβλήματα wohl in vielem Recht, geht aber vielleicht etwas zu weit, wenn er der Schrift einen mehr dialektischen als naturwissenschaftlichen Charakter zuschreibt. Sie hinterläßt zwar den Eindruck eines eigenartigen inhomogenen Durcheinanders, enthält aber neben völligen Verkehrtheiten doch so viel instinktiv richtig Erkanntes und gut Gesehenes, und auch so viele exakte und richtige Beispiele aus dem täglichen Leben, daß für die Einschätzung dieser Schrift wohl eine Mittelstellung zwischen Machs und Duhems Bewertung am gerechtesten ist.

§ 2. Die Pseudo-Euklidischen Mechanikschriften.

Unter dem Namen Euklids sind eine Reihe von Schriften mechanischen Inhalts vorhanden. Ein Teil ist in lateinischen Übersetzungen aus dem Arabischen seit dem Mittelalter in der Hand der abendländischen Mathematiker gewesen; andere sind erst dadurch bekannt geworden, daß Woepcke sie in ihrem arabischen Text mit französischer Übersetzung[13]) 1851 herausgegeben hat. Mach tut all dieser Schriften keine Erwähnung. Aber gerade in diesen Schriften tritt derjenige Satz auf, den Mach, ohne hiervon zu wissen, als „Archimedisches Axiom" hervorgehoben hat (vgl. die Einleitung); und teils sichtbar, teils unsichtbar haben sie in die folgende Entwicklung eingegriffen.

[13]) Journal Asiatique IV. série, tome XVIII, 1851, S. 225—232.

Die Gesamtheit dieser Schriften ist bei Duhem[14]), Schuster[15]) und Heiberg[16]) eingehend geschildert worden. Für eine vollständige Geschichte der Statik müßte allerdings diese Analyse von dem neuen Standpunkt aus, der durch die Steinsche Archimedesarbeit gegeben ist, erneut nach den Manuskripten vollzogen werden.

Hier sei nur auf die eine der beiden von Woepcke edierten Schriften „Sur la balance" eingegangen, da Duhem, der zwar im Gegensatz zu Heiberg die Schrift für griechischen Ursprungs hält, ihren mathematischen Rang doch verkannt zu haben scheint. Sie enthält Gedankengänge, denen wir in ähnlicher Form bei Huygens und bei Lagrange wieder begegnen werden. Ich werde die Arbeit mit ihren Sätzen und Figuren kurz darstellen und dabei zeigen, daß alle Schlüsse durch die eigenen Axiome der Schrift und die ersten Archimedes-Postulate logisch gedeckt sind.

Die Schrift beginnt mit einer Definition nach Aristoteles: „Das Gewicht ist das Maß der Schwere und der Leichtheit, von einem im Verhältnis zum anderen bestimmt mittels der Wage".

Es folgen zwei Axiome.

Axiom I ist identisch mit dem ersten Teil vom P_1 des Archimedes, aber nur für stabiles Gleichgewicht (Parallelität zum Horizont).

Axiom II ist von größter Wichtigkeit und Leistungsfähigkeit: „Wenn zwei gleiche oder ungleiche Gewichte an den beiden Enden eines fléau (Hebel) angebracht sind und dieser an einem arbre de balance in einem seiner Punkte so aufgehängt ist, daß die beiden Gewichte den fléau parallel zum Horizont halten; wenn ferner das eine der beiden Gewichte an seinem Platz am Ende des fléau gelassen wird, man aber vom anderen Ende des fléau eine Gerade, nach welcher Seite man will, zieht, die mit ihm einen rechten Winkel bildet, und wenn man nun das andere Gewicht an irgend einem Punkte dieser Geraden aufhängt, dann wird der fléau der Ebene des Horizonts parallel sein wie vorher. Daraus folgt übrigens, daß sich das Gewicht nicht ändert, wenn man die Fäden von einer der beiden Schalen der Wage verkürzt und die der anderen verlängert".

Nun kommen vier Sätze, deren letzter der Hebelsatz ist.

In Satz I wird bewiesen: Hängen in drei Punkten E, A, H einer horizontalen Ebene, die in C unterstützt ist, drei gleiche Gewichte, so halten diese die beiden Linien AB, ED parallel zum Horizont.

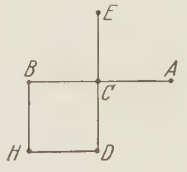

Fig. 4.

Beweis: Die Gewichte in A und H halten AB parallel zum Horizont (Axiom II), ebenfalls halten die Gewichte E und H die Linie ED parallel zum Horizont (Axiom II). Es ist evident: falls das Gewicht von H nach

[14]) Duhem I S. 61 ff.

[15]) Fr. Schuster „Zur Mechanik Leonardo da Vincis". Diss. Erlangen 1915 S. 22 ff.

[16]) Euklidstudien 1882 und Handb. d. Altertumswiss. V 1. Abt. 2. Hälfte 1925 § 3.

B gebracht wird, dann bleibt zwar AB parallel zum Horizont (P_1), aber ED neigt sich nach E (P_3; es wird hier wie auch im folgenden das Superpositionsprinzip angewendet, das bei Archimedes als S_4 und L_1 vorkam[17]), und das besagt: bei Addition bezw. Subtraktion zweier Gleichgewichtssysteme mit demselben Unterstützungs- oder Schwerpunkt hat das resultierende System auch denselben Unterstützungs- oder Schwerpunkt). Also muß man Gewicht E nach C bringen oder Gewicht E in E lassen und ein gleich großes in D anbringen (P_1), um auch ED parallel dem Horizont zu erhalten. „Wir schließen daraus, daß das im Punkte H angebrachte Gewicht für sich allein die beiden Gewichte ersetzt, die wir in den Punkten B, D angebracht annahmen, und deren jedes gleich diesem ersten Gewicht war."

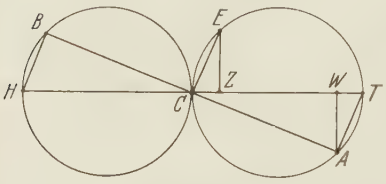

Fig. 5.

Satz II. Voraussetzung: $HC = CT$; $CZ = WT$; EZ und $AW \perp CT$; C ist Unterstützungspunkt.

Behauptung: drei gleiche Gewichte in H, Z, W angebracht halten die Linie HCT parallel dem Horizont.

Der Beweis geht in die Ebene über[18]).

Beweis: drei gleiche Gewichte in H, E, A „halten die beiden Linien AB, EC dem Horizont parallel ebenso wie die Ebenen der beiden Kreise und alle dort beschriebenen Linien" (nach Satz I; Woepcke bemerkt hierzu, daß Satz I zwar spezieller formuliert war, als er hier angewendet wird, daß bei seinem Beweis aber wirklich nur die Tatsache $AC = CB$ und $EC = BH$ wesentlich war). Die Linie TH, die also auch parallel dem Horizont ist, bleibt dies auch (nach dem Superpositionsprinzip und Axiom II), wenn man das Gewicht A nach W bringt, dagegen neigt sich die Ebene nach der Seite des Gewichtes E (P_3). Wenn das Gewicht E nun noch nach Z gebracht wird, ist HT (und die Ebene) parallel dem Horizont (Axiom II). Es wird kurz festgestellt, daß man ähnlich beweisen kann, TH bleibe parallel dem Horizont, wenn das Gewicht in Z um irgend eine Strecke nach W hin und das Gewicht in W um dieselbe Strecke nach Z hin verschoben wird. (Daraus folgt sofort der „Spezialfall von P_6", der also hier aus dem Axiom II bewiesen wird.)

Satz III. Voraussetzung: $BC = CA$; BC und CA werden in

[17]) Stein S. 229 und 238.

[18]) Auch diese Betrachtungen sind durch die bewundernswerte Formulierung gerechtfertigt, die Archimedes seinen Postulaten gegeben hat. Vgl. dazu auch unten § 7 Huygens und § 8 Lagrange.

eine beliebige Anzahl (als Beispiel wird 5 genommen) gleicher Teile geteilt. C ist Unterstützungspunkt.

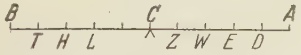

Fig. 6.

Behauptung: $BT = TH = HZ = \cdots$ „en puissance de poids".

Beweis: drei gleiche Gewichte in D, Z, B angebracht halten AB parallel dem Horizont (Satz II). Das Stück BT, auf Grund dessen das Gewicht B das Gewicht D überwiegt, ist gleich CZ an Länge. „Es ist also evident, daß CZ das Äquivalent von TB ist 'en puissance de poids'". Wird das Gewicht D nach E, das Gewicht B nach T gebracht und bleibt das Gewicht Z an seinem alten Platze, so halten diese drei Gewichte ebenfalls AB parallel dem Horizont (Satz II). Jetzt ist CZ das Äquivalent von TH en puissance de poids. Aber CZ war schon das Äquivalent von TB en puissance de poids. Also ist $TB = TH$ en puissance de poids. Analog kann gezeigt werden, daß alle an Länge gleichen Teile der Linie CB gleiche puissance de poids haben. Es ist also evident, daß die Verminderung an puissance de poids, die durch Überführen des Gewichtes von B nach T hervorgerufen wird, gleich ist der Verminderung an puissance de poids bei Überführen des Gewichtes von T nach H, etc.

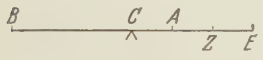

Fig. 7.

Satz IV. Voraussetzung: C ist Unterstützungspunkt; das Gewicht in A verhält sich zum Gewicht in B wie die Entfernung CB zur Entfernung CA.

Behauptung: Es herrscht Gleichgewicht; der fléau ist parallel dem Horizont.

Beweis: Als Beispiel wird $CB = 3\,CA$ genommen. Man macht $CE = CB$. Das Gewicht A wird entfernt gedacht; zwei Gewichte, jedes gleich dem Gewicht B, werden in E und C angebracht. Es herrscht Gleichgewicht (P_1 und Superpositionsprinzip). Bringt man das Gewicht E nach Z und das Gewicht C nach A, so herrscht Gleichgewicht (Satz II). Wird jetzt das Gewicht Z nach A gebracht und außerdem noch ein gleich großes Gewicht in A als Äquivalent angehängt, dann halten die drei in A angebrachten Gewichte, deren jedes gleich dem Gewicht B ist, diesem Gewicht B das Gleichgewicht (Satz III und Superpositionsprinzip). CE ist dasselbe Vielfache von CA, wie es die Summe der Gewichte in A von jedem dieser Gewichte, also dem Gewicht B, ist. Also — verhält sich im Gleichgewichtsfalle das Gewicht in A zum Gewicht in B wie die Entfernung CB zur Entfernung CA.

Die landläufige Auffassung geht dahin, daß hier eine späte Arbeit vorliegt, die allein schon wegen der Verwendung des Momentbegriffs (puissance de poids) aus dem Rahmen der griechischen Denkweise her-

ausfällt. So leicht darf man sich die Sache nicht machen; und Duhem ist der Wahrheit gewiß näher, wenn er darin jedenfalls einen alten Kern erblickt, der von einem späteren Bearbeiter verdorben worden ist. Die vorstehende Analyse hat ergeben, daß die Arbeit auch in ihrem jetzigen Zustand weit ernster zu nehmen ist, als Duhem denkt. Man kann geradezu die Frage stellen, ob dieser Versuch in seiner jetzigen oder irgend einer anderen Urform nicht doch etwa auf die Zeit vor Archimedes zurückgeht. Ohne diese Frage hier entscheiden zu wollen, will ich nur feststellen, daß kein Widerspruch darin läge, wenn Archimedes diese Wendung der Theorie gekannt und trotzdem durch die seine ersetzt hätte. Denn Archimedes ist es nicht um die Begründung des Hebelsatzes als Endziel zu tun, und er muß genau gewußt haben, daß er zu diesem Ende P_6 nicht hätte in solcher Allgemeinheit zu formulieren brauchen. Aber das Axiom, das hier vorangestellt wird, um den „Spezialfall von P_5" zu beweisen, hätte nie ausgereicht, um die anderen Funktionen zu erfüllen, die P_6 bei Archimedes zu übernehmen hatte[19]).

§ 3. Leonardo da Vinci.

Im 13. Jahrhundert tritt eine starke Belebung der mechanischen und sonstigen physikalischen Forschung ein, angeregt durch die arabische Vermittlung antiker Überlieferung. Groß ist der Einfluß der μηχανικὰ προβλήματα. Jordanus Nemorarius und seine Schule sind die hervorragendsten Vertreter dieser intuitiven Methode. Sie sehen ganz wie Pseudo-Aristoteles große Zusammenhänge und haben gute neue Gedanken, aber machen auch im einzelnen sehr vieles falsch. Der zwei Jahrhunderte später lebende Leonardo da Vinci (1452—1519) ist als Fortsetzer dieser Forschungsmethode anzusprechen. Er ist einer der ganz großen, intuitiv und mit einem fast immer sicheren Instinkt arbeitenden Naturwissenschaftler gewesen. Typisch für ihn ist die starke Beziehung zur Praxis; er gibt außerordentlich viele Zahlenbeispiele und Anwendungen von Sätzen, die er gelegentlich auch allgemein ausspricht. Seine Aufzeichnungen sind Tagebuchblätter, die in wildem Durcheinander ohne einheitlichen Plan und mit vielen Flüchtigkeits- und Rechenfehlern vielerlei Bemerkungen und Zeichnungen zu allen Gebieten des Lebens und der Wissenschaft bringen. Es ist aus dieser Charakterisierung verständlich, daß man bei Leonardo nur wenig allgemeine Formulierungen, geschweige denn streng deduktive Beweise findet. Duhem (I, II) und Schuster[20]) bringen eingehende Dar-

[19]) S. Einleitung S. 556.

[20]) Vgl. Anm. 16. Die wichtigsten Textausgaben und Besprechungen sind: a) Il codice Atlantico di L. d. V. nella Bibl. Ambrosiana di Milano. Ulrico Hoepli, Milano

stellungen, auf die ich prinzipiell verweise. Es ist dort herausgearbeitet, wie stark Leonardo bei aller Genialität von seinen Vorgängern beeinflußt ist.

Das Hebelgesetz spricht er in beiden Formen aus, der aristotelischen (es besteht umgekehrte Proportionalität zwischen den Gewichten und ihren in der gleichen Zeit zurückgelegten Wegen) und der archimedischen (es besteht umgekehrte Proportionalität zwischen den Gewichten und ihren Hebelarmen). Aristoteles wie Archimedes werden von ihm zitiert, ebenfalls ein Werk des Heron von Alexandrien, welches die aristotelische Fassung enthielt.

Der „potentielle Hebel" (in modernen Worten: der durch Komponentenzerlegung senkrecht und parallel zur Richtung der Kraft erhaltene Hebelarm im Sinne des Begriffes „Moment"), den Leonardo so außerordentlich viel anwendet[21]), ist ein von Heron von Alexandrien geschaffener Begriff. Die darauf bezüglichen Sätze sind in dem Pappusexzerpt aus Herons Mechanik, das Leonardo vorgelegen hat, nicht enthalten[22]). Auch kann man heute noch nicht entscheiden, ob Leonardo die ganze Mechanik des Heron, die uns heute nur arabisch erhalten ist, in Händen gehabt hat. Eine indirekte Beeinflussung durch dieses Werk ist aber möglich und sogar wahrscheinlich; denn bei Leonardo findet man Zeichnungen und Textanklänge aus einem Werk, dessen 3 letzte Bücher wahrscheinlich griechischen Ursprungs sind und Ähnlichkeiten mit Heron haben. Dieses Werk ist eine Bearbeitung der Gleichgewichtslehre des Jordanus Nemorarius durch einen genialen unbekannten Autor, den Duhem „Vorläufer Leonardos" nennt; später ist dies Werk noch einmal von Tartaglia überarbeitet worden und unter dem Namen „Jordani Opusculum de ponderositate" 1565 im

1894—1904 (Zitiert z. B. C. A. 122, va). b) Besprechung und Indexausgabe dazu von Max Noether: Literarisches Zentralblatt, Lpzg. 1894, 1895, 1896, 1896, 1897, 1897, 1900, 1902, 1905. c) Les manuscrits de L. d. V. par Ch. Ravaisson-Mollien, Paris, Heft E 1883 (Zitiert z. B. R. M. E 65 r). d) Il manuscritti e i disegni di L. d. V. publ. dalla Reale Comm. Vinciana. Il codice Arundel 263 del museo Britannico di Londra. Parte I ... Danesi editore Roma 1923 (Zitiert z. B. C. Ar. I 7 v). e) R. Marcolongo: Quelques remarques sur la publication d'un nouveau manuscrit de Leonardo da Vinci. Acta Math. 49 (1926) S. 69—94. f) P. Duhem: Leonardo da Vinci et la composition des forces concourantes. Bibl. Math. (3)4, 1903 S. 338—345. — Nach Abschluß der vorliegenden Arbeit ist eine umfangreiche und eingehende Abhandlung zum Gegenstand dieses Paragraphen erschienen: R. Marcolongo, „La meccanica di Leonardo da Vinci", Atti d. Reale Ac. d. Scienze Fis. e Mat. Soc. Reale d. Napoli (2) 19, 1933 Nr. 2.

[21]) Dabei spricht er aber nie von „Moment" oder Kraft mal Hebelarm, sondern drückt alles durch die Proportionenrechnung der Alten aus.

[22]) Pappi Alexandrini collectiones quae supersunt. Ed. Fr. Hultsch. Berlin 1878 S. 1060—1071 und 1115—1135.

Druck erschienen. Duhem gibt im Anhang zu seinem Werke (II S. 318—323) zu, daß Leonardo auf diesem Wege von Heron beeinflußt sein kann, nachdem er sich im ersten Teil gegen eine Beeinflussung der späteren Statik durch Herons „Potentiellen Hebelarm" ausgesprochen hatte.

Mach bringt auf S. 21 eine Zeichnung und dazu gehörigen Text von Leonardo. Die einzige Quelle, auf die er sich beruft, ist eine Arbeit von Grothe[23]). Diese wird von Feldhaus als eine „unkritische Arbeit" bezeichnet[23a]). Zeichnung und Text, die Grothe S. 27 und Mach S. 21 angeben, sind in den Werken Leonardos nicht zu identifizieren. Die größte Ähnlichkeit weist die Stelle R. M. E 65 auf. Zeichnung und Text lauten in Wirklichkeit:

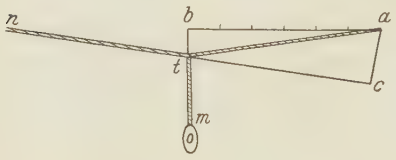

Fig. 8.

„*a t n m* sind die realen Aufhängungen des Gewichtes *o*, und die Linien *a c* und *a b* sind der potentielle Hebel und Gegenhebel des Gewichtes *o*, und die halbrealen Aufhängungen sind *c n* und *b m*; diese sind bzw. mit dem potentiellen Hebel *a c* und dem potentiellen Gegenhebel *a b* verbunden"[24]).

Wenn Mach 1883, als er sein Buch schrieb, nur die Grothesche Arbeit von 1874 benutzte, so muß man berücksichtigen, daß Leonardos Werke noch fast unzugänglich waren. Dann sind aber 1881 bis 1904 die großen Codex-Ausgaben erschienen, ferner fast gleichzeitig die sehr guten Inhaltsangaben zum Codex Atlanticus von Max Noether. 1905 und 1906 erschienen die beiden Bände von Duhems Werk. Zu seiner 7. Auflage 1912 hat Mach diese Duhem-Bände auch durchgesehen und verarbeitet (Mach S. 75—80). Trotzdem schreibt er die Erfindung des „potentiellen Hebels" noch Leonardo zu (er spricht S. 78 von „seiner Konzeption"), während nach Duhem die Beeinflussung durch griechische Quellen und Jordanus möglich oder sogar wahrscheinlich ist. —

Es mögen hier noch zwei Bemerkungen stehen.

Die erste bezieht sich auf den „Spezialfall von P_6", den wir in der pseudoeuklidischen Schrift „Sur la balance" zuerst vorfanden. Teils als Satz, teils als Axiom steht dieser „Spezialfall von P_6" noch

[23]) H. Grothe: Leonardo da Vinci, Berlin 1874.

[23a]) Franz Maria Feldhaus „Die Technik der Vorzeit, der geschichtlichen Zeit und der Naturvölker". Leipzig u. Berlin 1914, S. 621 und „Leonardo der Techniker und Erfinder" 2. Aufl. Jena 1922, S. 164.

[24]) Schuster sagt bei Besprechung dieser Stelle, daß Grothe und Mach eine hierzu fast kongruente Zeichnung anführen. (Also werden sie wohl auch diese Stelle gemeint haben, obgleich sie kein Zitat anführen.) Nachdem ich den ganzen Codex Atlanticus wie auch R.M.E und C. Ar. I auf diese Zeichnung mit Text durchgesehen habe, kann ich mich nur der Meinung Schusters anschließen.

im arabischen „liber Carastonis“, den „elementa Jordani“ und bei Leonardo[25]). Es wird uns im nächsten Paragraphen wichtig sein[26]), daß diese Formulierung also als Axiom oder auch Satz eine bekannte und nicht unbeliebte Vorstellung gewesen ist.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Methoden der Leonardo-Forschung. Während Duhem allgemein in seiner Betrachtung aller historischen Phänomene von den heutigen Begriffen ausgeht und an ihnen auseinandersetzt, was der betrachtete Autor schon hat oder was er noch nicht kennt, will Schuster im bewußten Gegensatz zu dieser Methode ganz von den heutigen Begriffen abstrahieren, um nicht irgend etwas in die Dinge hineinzusehen, was nicht darin enthalten ist. Er geht in seiner Objektivität aber sicher viel zu weit, wenn er einfach konstatiert, daß bei Leonardo so viel Falsches und Richtiges neben einander steht, daß man wohl annehmen muß, jener habe es nicht vermocht, „sich zu einer einheitlichen richtigen Erkenntnis durchzuringen“. Wenn man die Schustersche Methode verbinden würde mit der quellenkritischen Methode des zeitlichen Vergleichs der einzelnen Blätter der Leonardo-Codices, wie sie Duhem und Marcolongo schon angewendet haben, würde es sich vielleicht feststellen lassen, daß dem alten Leonardo nur noch wenige Rechen- und andere Fehler zuzuschreiben sind, diese sich vielmehr zumeist in den Notizen des jungen Leonardo befinden.

§ 4. Guido Ubaldo.

Als durch die Araber und durch den Humanismus die antiken Quellen immer zugänglicher wurden und man mehr Geschmack an der Strenge der Alten bekam, setzte am Ende des 16. Jahrhunderts eine starke Reaktion gegen die zwar großzügigen und intuitiven, aber auch reichlich unexakten und verworrenen Gedanken und Beweisgänge der Jordanus-Schule ein. Fortsetzer der strengen Methode des Archimedes waren Commandino, Maurolico, Luca Valerio, Benedetti und Guido Ubaldo. Die beiden letzten schildert Duhem als so subtil und überkritisch, daß sie im Namen der deduktiven Strenge fast alles verwarfen, was die Jordanus-Schule geleistet hatte, sodaß durch diese logische und strenge Säuberungsaktion die Statik sogar zurückgebracht und ihre Entwicklung ein Jahrhundert lang gehemmt wurde[27]).

Von den Werken des Guido Ubaldo (1545—1607, Freund und Förderer Galileis) zitiert Mach nur das Mechanicorum liber, Pisa 1577 (von mir zitiert als Ubaldo I). Er sagt (Mach S. 22), man fände bei

[25]) S. Schuster S. 22—36.
[26]) S. unten § 4, Guido Ubaldo S. 573.
[27]) Duhem I S. 210—212.

Ubaldo ähnliche Überlegungen wie bei Leonardo da Vinci (also die senkrechte Komponentenzerlegung des potentiellen Hebelarms); ferner sei Ubaldos Denkweise mehr geometrisch als mechanisch (Mach S. 46). Um zu diesen Worten Machs Stellung nehmen zu können, mußten wir noch ein zweites Werk des Ubaldo eingehend analysieren: Guidi Ubaldi e Marchionibus Montis in duos Archimedis aequeponderantium libros Paraphrasis scholiis illustrata. Pisa 1588, das ich als Ubaldo II zitiere.

Ubaldo ist ein glühender Verehrer des Archimedes, außerdem lobt er Aristoteles und Pappus, die er neben Euklid viel am Rande zitiert. Er sagt, Aristoteles habe den Hebelsatz qualitativ abgeleitet in seinen μηχανικὰ προβλήματα, Archimedes habe sich damit nicht mehr begnügt und daher einen quantitativen Beweis gegeben, der sachlich und methodisch die Grundlage für die ganze Mechanik sei. Archimedes sei ein so großes Genie, „daß es eher scheint, die Natur habe Archimedes nachgeahmt, als daß Archimedes die Natur beschrieben hat“ [28]).

Das Werk „Mechanicorum liber“ handelt von den einfachen Maschinen. Es zerfällt in sechs Teile: Wage, Hebel, Rolle, Welle am Schwungrad, Keil und Schraube. Als Vorbereitung für die Hebeltheorie gibt Ubaldo: Definitiones, Communes Notiones und Suppositiones (Postulate).

Definitiones.

„Der Schwerpunkt eines jeden Körpers ist ein gewisser innerhalb gelegener Punkt. Wenn man in ihm das Gewicht unterstützt denkt, ruht es, während es bewegt wird, und bewahrt jene Lage, die es am Anfang hatte, und wird bei der Bewegung selbst nicht herumgedreht. Diese Definition des Schwerpunktes überliefert Pappus Alexandrinus im 8. Buche [29]). Aber Fridericus Commandinus erklärt im Buche über den Schwerpunkt der festen Körper dasselbe Zentrum folgendermaßen: Der Schwerpunkt einer jeden körperlichen (solidae) Figur ist jener innerhalb gelegene Punkt, um den herum überall Teile von gleichen Momenten bestehen. Wenn nämlich durch dieses Zentrum eine Ebene gelegt wird, die die Figur irgendwie schneidet, so teilt sie sie immer in Teile, die im Gleichgewicht sind“.

Communes Notiones.

I. „Wenn von einem System, das im Gleichgewicht ist, ein anderes im Gleichgewicht befindliches abgezogen wird, ist das Restsystem auch im Gleichgewicht (Si aequeponderantibus aequeponderantia auferantur, reliqua aequeponderabunt)“.

[28]) Ubaldo II, S. 5.

[29]) Pappus sagt (VIII Prop. I Ed. Hultsch S. 1030): „Wir nennen Schwerpunkt eines jeden Körpers einen innerhalb gelegenen Punkt, bei dessen nur gedachter Unterstützung das Gewicht in der Bewegung ruht und seine anfängliche Lage beibehält“. Dann nach Einführung von Schnittebenen: „Denn jede durch ihn gelegte Ebene teilt das Gewicht in zwei im Gleichgewicht befindliche Teile, sodaß es keine Ursache zur Veränderung erhält. Denn in jeder Stellung dieses Gewichtes sind die Teile auf beiden Seiten dieses Punktes im Gleichgewicht.“

II. „Wenn zu einem System im Gleichgewicht ein anderes im Gleichgewicht befindliches hinzuaddiert wird, ist die Summe auch im Gleichgewicht".

III. „Die Dinge, die mit demselben im Gleichgewicht sind, sind unter einander gleich schwer".

Suppositiones.

I. „Ein Körper hat nur einen einzigen Schwerpunkt".

II. „Der Schwerpunkt eines Körpers ist immer in derselben Lage bezüglich seines Körpers".

III. „Gewichte bewegen sich nach unten, folgend ihrem Schwerpunkt".

Wir sehen, daß in der Schwerpunktdefinition von Commandinus, die Ubaldo anführt, das Wort „Moment" vorkommt. Ubaldo selbst benutzt diesen Begriff aber im ganzen Buche nicht, sondern drückt alles mit Hilfe der Proportionenlehre aus, indem er den Stil der Alten möglichst getreu nachahmt.

Man wird zuerst fragen, ob diese Aussagen Ubaldos ein Ersatz für die Archimedischen Definitionen sein sollen oder eine Ergänzung zu ihnen. Diese Frage läßt sich unzweideutig beantworten. Einerseits befindet sich nämlich keine dieser Aussagen explizite in der Abhandlung des Archimedes über das Gleichgewicht ebener Figuren, wie man etwa der Darstellung von W. Stein leicht entnehmen kann. Andererseits benutzt Ubaldo bei seinen Beweisen nicht etwa nur die eben aufgeführten Aussagen, vielmehr deckt er alle Schlüsse durch Berufung auf Sätze oder Postulate von Archimedes; erst wo diese nicht ausreichen, zitiert er seine eigenen. Die hier angeführten Aussagen Ubaldos sind also kein Ersatz der Archimedischen Postulate, sondern eine Ergänzung derselben. Überhaupt will Ubaldos Buch nur eine Fortsetzung und Anwendung des Archimedes-Werkes sein; denn er leitet den Hebelsatz z. B. garnicht selbst ab, sondern zitiert ihn nur, fast auf jeder Seite seines Buches, als „Archimedes, de aequeponderantibus I prop. VI".

Man wird weiter fragen, ob die Aussagen Ubaldos notwendige Ergänzungen des Archimedes-Textes sind, und dann, ob sie auch ausreichen. Diese Fragen sollen hier noch nicht erörtert werden. Denn Ubaldo selbst hat 11 Jahre später ein weiteres Werk über diesen Gegenstand herausgegeben (Ubaldo II), worin er diese Aussagen in vollständigerer Form wiederholt. Da vielen Lesern des Mechanicorum liber, sagt er in diesem zweiten Werk, die inneren Gründe und Fundamente seiner Beweise nicht so klar geworden seien wie ihm selbst, wolle er das Gleichgewichtswerk des Archimedes Schritt für Schritt analysieren, damit seinen Zeitgenossen die logische Unfehlbarkeit dieses Forschers recht klar werde, was sonst durch die Kürze, mit der Archimedes sich fasse, etwas beschwerlich sei. Ubaldo arbeitet in diesem Werk mit einer erstaunlichen philologischen Exaktheit und Ehrfurcht

vor dem Text. Der Archimedes-Text ist durch andere Typen hervorgehoben, er ist fast wörtlich der Text der Heibergausgabe (Teubner 1913). Wo Ubaldo glaubt, sinngemäß etwas konjizieren zu müssen, sind es immer Worte, die Heiberg später aus anderen Überlieferungen als bessere Lesart anführt!

Ubaldo teilt seine Erläuterungen in drei Klassen (II S. 8):

1. Scholien, um die Kunstfertigkeit des Archimedes recht hervorzuheben.

2. „Und viele Lemmata, die zu den Beweisen des Archimedes notwendig sind, haben wir bewiesen".

3. Andere, die zur Erklärung und Verdeutlichung noch sehr nützlich sind.

Auch hier beginnt er mit der Definition des Schwerpunkts im gleichen Wortlaut wie oben, also mit der Pappus-Definition, und zwar für Ebenen und Körper getrennt. Dieser Punkt muß im voraus und gesondert erörtert werden, weil er bei Ubaldo eine logische Grundhaltung aufzeigt, die wir bei Archimedes nicht in derselben Form beobachten können. Ubaldo verfährt hier in gewissem Sinne ähnlich, wie es Euklid tut. Er schaltet vor die Postulate eine Aussage, die wie eine explizite Definition anmutet, die aber erst in Gemeinschaft mit den darauf folgenden Postulaten den Begriff ganz ausschöpfen soll. Und er behandelt es als selbstverständlich, daß Archimedes die gleiche Auffassung gehabt hat: „Cum itaque supponat (nämlich Archimedes), nos exquisitam habere notitiam centri gravitatis, illius (nämlich des Schwerpunktes) definitionem afferre libuit" (Ubaldo II S. 8). Ja, Ubaldo glaubt, Archimedes habe alle mechanischen Prinzipien des Werkes „μηχανικὰ προβλήματα", das er dem Aristoteles selbst zuschreibt, für die Konstituierung seiner Postulate als bekannt vorausgesetzt. Vergleichen wir diese Auffassung mit der Analyse, die W. Stein mit dem „Gleichgewicht ebener Figuren" vorgenommen hat, und die es geflissentlich vermeidet, mit einer solchen vorgefaßten Meinung an den Text heranzutreten, so ist festzustellen, daß der logische Bedarf des Archimedes die Pappus-Definition in keiner Weise erfordert. Die Redaktion des „Gleichgewichts ebener Figuren", die uns vorliegt, ist, wie Stein S. 239 oben nachweist, offensichtlich unvollständig. Daraus folgt aber noch lange nicht, daß in dieser Arbeit des Archimedes irgend eine Definition gestanden hätte, wie wir sie aus Pappus kennen. Hätte in der Urredaktion der Gleichgewichtslehre, auf deren Vorhandensein einige Anzeichen hinweisen, die Pappus-Definition oder eine ihr ähnliche gestanden, so wäre die Formulierung von P_6 auf jeden Fall überflüssig gewesen.

Überdies entspräche ein Wortlaut, wie wir ihn bei Pappus lesen, seinem Stil nach nicht dem Archimedischen Geiste.

Wir können hier nicht ganz an der Frage vorbeigehen, was Archimedes sich bei seinem „αἰτούμεθα“ und bei seinen προλαμβανόμενα gedacht hat. Wir müssen die Frage stellen, ob an der Spitze jener Urredaktion überhaupt eine explizite Definition nach dem Muster von Euklid I gestanden hat. Auch bei seiner offensichtlich vollständig erhaltenen Theorie der konvexen Bereiche und ihrer Oberfläche findet sich keinerlei Wortlaut einer expliziten Definition. Diese gewichtige Parallele legt die Annahme nahe, daß eine explizite Definition des Schwerpunkts nicht in der Absicht des Archimedes gelegen habe.

Es würde die Sache auf der anderen Seite natürlich in keiner Weise fördern, wollten wir behaupten, Archimedes habe sich der logischen Form des impliziten Definierens bewußt bedient. Implizite Definition ist eine komplexe Sache. Von dem, was Plato am Ende des 6. Buches der Politeia von der rein logischen Struktur der Mathematik sagt, bis zu Hilberts Fragestellungen der Unabhängigkeit, Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit der Axiome, die er in seinen Grundlagen der Geometrie aufwirft, ist ein weiter Weg; und auch bei diesem Standpunkt ist Hilbert noch nicht stehengeblieben. Alle diese Parallelen mit modernen Denkweisen können nur den Sachverhalt verwirren, der sich uns bei Archimedes darbietet. Archimedes berührt nirgends die erkenntnistheoretischen Formen, die er bei Euklid vorfindet; er übernimmt den Euklid, wie er ist; wie ein Elementenbuch des Archimedes oder ein Kolleg von ihm ausgesehen hätte, erfahren wir nicht. Aber überall, wo er auf die euklidische Wissenschaft neue Begriffe aufzubauen hat wie den Begriff der Oberfläche oder den Begriff des Schwerpunkts, schafft er keinerlei Anlaß zu solchen logischen Beanstandungen, wie die Analysen von Pasch und Hilbert sie bei Euklid zu erheben hatten. Von allen Leistungen des Archimedes ist dies eine der bewunderungswürdigsten. Euklids Elemente sind in Buch V einer solchen Haltung zum mindesten auch viel näher als in Buch I oder XI; und Archimedes zitiert an der Stelle, wo er auf den Sinn von Axiomen einmal explizite zu sprechen kommt, gerade Eudoxos, auf den Euklid V zurückgeht.

Dies mußte erst klargestellt sein, ehe wir daran gehen konnten, die eigentlichen Untersuchungen Ubaldos zu besprechen. Es stellt sich nämlich heraus, daß Ubaldo genau das beabsichtigt hat, was W. Stein in seiner Arbeit durchführt — eine Leistung, die dann durch die Jahrhunderte völliger Vergessenheit verfallen ist. Aber dadurch, daß er dem Archimedischen Fundament die Schwerpunktsdefinition eingefügt hat, sind von vornherein wesentliche Abweichungen seiner Durchführung

von derjenigen Steins bedingt. Ja, es ist dies vielleicht der einzige Grund, daß Ubaldo trotz der außerordentlichen Ehrfurcht, mit der er an das Werk des Archimedes herangeht, zu einer Reihe von Irrtümern gelangt ist.

Der erste nicht weiter folgenreiche dieser Irrtümer passiert ihm, als er das Archimedische P_4 aus der Pappus-Definition abzuleiten versucht. Seine Überlegung ist logisch mißglückt. Nur nebenbei sei erwähnt, daß er P_1 und P_5 formal in zwei Teile zerlegt hat, sodaß er statt der 7 Postulate des Archimedes 9 aufführt.

Ubaldo vollzieht nun genau das, was Stein später getan hat: er prüft den ganzen Archimedes-Text durch und stellt alles fest, was Archimedes „supponit tamquam cognita" (Ubaldo II S. 8). Wir wollen jetzt vergleichen, wie sich dies zu den „stillschweigenden Annahmen" von Stein verhält.

Zuerst die oben aufgeführten Aussagen aus Ubaldo I, die übrigens im wesentlichen in Ubaldo II mit eingearbeitet sind. Communis notio I, II sind identisch mit S_4 von Stein, dem additiven Superpositionsprinzip und seiner subtraktiven Nebenform (vgl. Stein S. 238, L_1)[30]: Comm. notio III ist eine Umkehrung von P_6, die Ubaldo lediglich für eigene Überlegungen, nicht für den Archimedischen Gedankengang zurechtmacht. Suppositio I ist in S_1 enthalten, Supp. II ist die Erweiterung von P_4 von ebenen auf räumliche Massen, Supp. III ist identisch mit einem von Archimedes in „Schwimmende Körper" ausgesprochenen Prinzip (s. Stein S. 241). Ferner bringt Ubaldo noch die von Stein (S. 228 und 231) S_2, S_3 und S_5 genannten Aussagen als von Archimedes zwar angewendete aber nicht ausgesprochene Voraussetzungen. Durch die Formulierung von S_3 scheidet Ubaldo noch einmal ausdrücklich zwischen stabilem und indifferentem Gleichgewicht: er zeigt, daß Satz IV des Archimedes nicht trivial ist (s. Stein S. 228). Ein wesentlicher Fehler unterläuft ihm nun aber, wenn er das von ihm vermißte S_2 beweisen will, denn bei diesen Betrachtungen arbeitet er nur mit indifferentem Gleichgewicht, widerspricht also seiner früheren Betrachtung. Wir konstatieren: Die von Ubaldo als „tamquam cognita" bezeichneten Voraussetzungen des Archimedes sind bis auf eine einzige, noch nicht aufgeführte, die gleich behandelt werden soll, identisch mit Steins „stillschweigenden Annahmen". Daß diese „stillschweigenden Annahmen" restlos durch Belege aus anderen Archimedeswerken oder durch die Ausdrucksform griechischer Mathematiker gedeckt sind, geht aus Stein S. 239 eindeutig hervor.

[30]) S. oben S. 562.

Nun aber zu dem wichtigsten und in seiner Auswirkung folgenschwersten Fehler: Ubaldo hat die Rolle, die das Archimedes-Axiom P_6 beim Beweise des Hebelsatzes (prop. VI) spielt, nicht erkannt. P_6 wird nur ein einziges Mal im ganzen Buch von ihm zitiert (II S. 128), und zwar beim Beweise von Arch. de aequep. II prop. I, wo es von Archimedes wirklich in seiner weitesten Bedeutung angewendet wird [31]). Dort werden zwei Parabelsegmente durch ihnen flächen- also auch gewichtsgleiche Parallelogramme ersetzt. Ubaldo versteht P_6 also nur als Ersetzung durch ein kompaktes gewichtsgleiches Gebilde und merkt nicht, daß die Ersetzung durch die im ganzen gleich schwere Summe einzelner Massen, die Archimedes zum Beweise des Hebelsatzes braucht, nur ein Spezialfall des richtig verstandenen P_6 ist. Um diesen Schluß beim Beweise von prop. VI ausführen zu können, leitet Ubaldo vielmehr erst noch die exakte Gleichgewichtsformulierung des später „Archimedisches Axiom" genannten Lemmas ab, also den „Spezialfall von P_6" [32]), wobei er ausdrücklich sagt (II S. 55): „Man muß noch eine andere Art des Schließens kennen, die Archimedes in dieser 6. Proposition anwendet". Er sagt keineswegs, Archimedes habe dies heimlich und unberechtigt benutzt, denn er weiß, daß die Hilfsmittel, mit denen er selbst das Lemma ableitet, Archimedes ebenfalls zu Gebote gestanden haben. Es sind dies P_1, S_4 und eine spezielle Anwendung der Schwerpunktsdefinition des Pappus (von der er ja glaubt, sie fehle nur durch Überlieferungsschwierigkeiten im Text). Daß diese letzte auf das richtig verstandene P_6 herausläuft, hat Ubaldo allerdings nicht bemerkt. Nach seiner Meinung hat sich Archimedes also nur ein wenig zu kurz gefaßt, wenn er das Lemma nicht erst hinschrieb, sondern nur damit operierte. Auf diese Weise scheint Ubaldo, dessen logische Schärfe und Feinheit oft zu bewundern ist, durch ein Mißverständnis den ungewollten Anlaß dazu gegeben zu haben, daß Archimedes falsch verstanden worden ist. Ubaldo selbst sagt noch nicht, Archimedes habe eine unberechtigte Annahme stillschweigend benutzt. Aber das Werk des Ubaldo, das lange Zeit großen Einfluß hatte [33]), ist dann später in diesem Sinne mißverstanden worden, sodaß Ubaldo wohl als der unfreiwillige Urheber der Legende vom „Archimedischen Axiom" anzusehen ist. —

Wenn Mach S. 46 betont, daß Ubaldos Ableitungen mehr geometrisch als mechanisch seien, so trifft er damit einen Wesenszug Ubal-

[31]) S. oben S. 556 und S. 564.

[32]) S. Einleitung S. 556.

[33]) Duhem I S. 212 und 226.

dos, dessen Bestreben und Stolz es ist, geometrisch saubere Betrachtungen anzuwenden[34]).

Andererseits experimentiert Ubaldo auch viel und nicht schlecht. So verbessert er die falsche Behandlung des indifferenten Gleichgewichtes, die Jordanus und seine Anhänger auf Grund der Theorie der „gravitas secundum situm" gegeben hatten[35]). In seiner Polemik gegen diese Jordanus-Schule ist Ubaldo nun recht kleinlich (was Duhem ihm auch vorwirft). So will er eine Theorie seiner Gegner widerlegen, indem er (beeinflußt von der Theorie Alberts von Sachsen) mit der Konvergenz der Schwerelinien zum Erdmittelpunkt arbeitet. Später aber betrachtet er selbst diese Linien durchaus als parallel.

Wie steht es nun mit der Behauptung Machs (S. 22), Ubaldo stelle Betrachtungen an, die auf die Theorie des „potentiellen Hebels" hinauskämen? Es ist festzustellen, daß Ubaldo sich aus seiner ganzen Einstellung heraus gegen jede solche Betrachtung energisch wehrt. Zwar führt er (I 26 r und v) die Behandlung des stabilen und labilen Gleichgewichts auch einmal mit senkrechten Zerlegungen durch (also gerade mit „potentiellem Hebelarm"), aber ausdrücklich, um zu zeigen, daß man auch manchmal mit falschen Voraussetzungen, wie seine Gegner sie haben, das Richtige ableiten könne. Denn die Wahrheit sei eben so stark, daß sie auch oft aus falschen Voraussetzungen herausleuchte und sich durchsetze.

Es folge noch ein Beleg, daß Ubaldo sich ausdrücklich gegen die Betrachtung „potentieller Hebel" und die Anwendung des damals schon bekannten Momentprinzips wandte. In dem Abschnitt über den Hebel behandelt er folgenden Fall (I 51—56): Er betrachtet ein Gewicht,

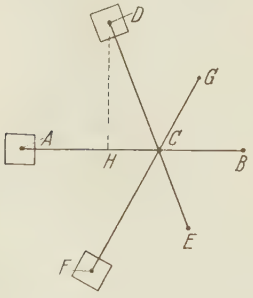

Fig. 9.

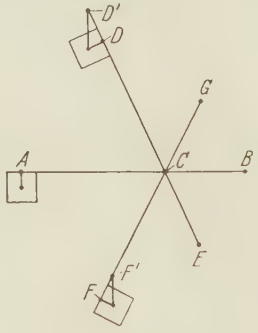

Fig. 10.

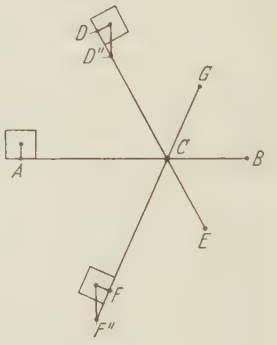

Fig. 11.

[34]) Wichtig ist in diesem Zusammenhange auch eine Stelle (II S. 17), wo Ubaldo die Betrachtungsweisen des Mathematikers, Astronomen und Mechanikers als gleichberechtigt hinstellt, obgleich jeder von anderen Eigenschaften der Materie abstrahiert und keiner die wahre Natur beschreiben kann.

[35]) Duhem I S. 214 ff.

das am Hebelarm AC[35a]) starr angebracht ist und durch eine „potentia“ in B im Gleichgewicht gehalten wird. $AC = DC = FC$; $BC = GC = EC$. In Fig. 9 fällt A mit dem Schwerpunkt des Gewichtes zusammen, in Fig. 10 liegt der Schwerpunkt unterhalb von A, in Fig. 11 oberhalb. Die zum Gleichgewicht benötigte „potentia“ in B ist in allen Figuren die gleiche. Wird nun der Hebel aus der horizontalen Lage um C gedreht, so muß man das Gewicht aufgehängt denken im Schnittpunkt der Verlängerung des Hebelarms mit der Vertikalen durch den Schwerpunkt. Da $DC = AC = FC$ ist, und $BC = GC = EC$, so muß in Figur 10 eine größere „potentia“ in E angreifen als in Fig. 9, da $D'C > DC$ ist; in Fig. 11 umgekehrt. Analog für die Punkte G.

Ubaldo benutzt dazu wesentlich, daß ein Proportionalitätsfaktor sich heraushebt, d. h. daß die „potentia“ in B, E, G senkrecht zum Horizont, also wie ein Gewicht, wirkt. In dieser Art hat er „potentia“ überhaupt eingeführt und durch sein ganzes Buch benutzt; für diese Art von Kraft sind seine Ableitungen auch alle korrekt[36]). Er betont, daß der in Betracht kommende Hebelarm DC ist (und nicht etwa der „potentielle Hebel“ HC). Also wäre es sehr unangebracht, ihm die Betrachtungsart des „potentiellen Hebels“ zuschreiben zu wollen, da er sich gerade dagegen ausdrücklich wehrt.

Wie ist nun aber Mach zu dieser Meinung von Ubaldo gekommen? Lagrange sagt in der Vorrede zur zweiten Auflage seiner „Mécanique analytique“[37]), die Betrachtung des Schwungrades habe Ubaldo zur Konzeption des Momentbegriffs geführt, wenn er ihn auch noch nicht auf die schiefe Ebene und die anderen Maschinen habe anwenden können. Auf diesen Irrtum Lagranges hin ist dem Ubaldo lange Zeit hindurch eine Entdeckung als Verdienst angerechnet worden, die schon vor ihm gemacht war, und gegen die er sich heftig gewendet hat. Die Lagrangesche Auffassung ist erst von Duhem widerlegt worden. Zwar hat Mach die zitierte Stelle bei Lagrange selbst wohl nicht gekannt[38]); er hat diese These aber wohl aus einer der anderen Ge-

[35a]) Die Buchstaben und die Linie DH sind von mir in Ubaldos Figuren hineingesetzt worden.

[36]) Nur zwei Stellen kann ich Duhem betreffs Unklarheit des Kraftbegriffs bei Ubaldo konzedieren. Die eine befindet sich im Abschnitt über das Schwungrad (I 106 r—111 v), wo Ubaldo zwischen einem vertikal wirkenden Gewicht und einer normal zum Radius des Rades angreifenden „animata potentia“ (z. B. drehende Hand) unterscheidet. Die zweite ist eine Stelle bei Ubaldos Keiltheorie, wo es nicht ersichtlich ist, wie Ubaldo bei einem beliebig gelagerten Keil und ohne Komponentenzerlegung mit einer vertikal angreifenden Kraft auskommen will.

[37]) 2. Auflage Paris 1811 S. 6 und 7.

[38]) S. unten Anm. 45.

schichten der Physik zwischen 1811 und 1905 entnommen. Vielleicht ist er auch beim Durchsehen des mechanicorum liber durch die folgenden Figuren I, 111 v darauf gebracht worden, obgleich ihre Theorie mit Hilfe des Hebelsatzes ohne jede senkrechte Komponentenzerlegung völlig einwandfrei ist (*AB* ist immer der Krafthebelarm, *BC* der Lasthebelarm)!

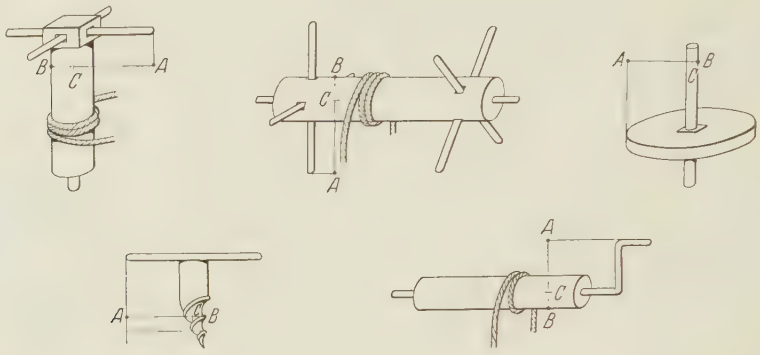

Fig. 12—16.

Machs Aussage S. 22 „Ähnliche Überlegungen wie bei Leonardo da Vinci finden wir bei Guido Ubaldo dal Monte" ist geeignet, bei einem unbefangenen Leser ein völlig schiefes Bild zu erzeugen, da Ubaldos wissenschaftliche Tendenzen genau entgegengesetzt waren. Das Werk Ubaldos selbst kann Mach nur sehr flüchtig angesehen haben, wenn er sich durch Lagranges Darstellung und die Figuren zu einer so falschen Auffassung verleiten ließ. Aber auch Duhems Werk hat er nicht gründlich genug durchgesehen, sonst hätte er diesen Satz über Ubaldo in der Neuauflage 1912 gewiß nicht mehr stehen lassen. Denn Duhem hatte es schon richtig gestellt, daß „Moment" und „potentieller Hebel" Begriffe sind, die Ubaldos Einstellung nicht entsprechen.

§ 5. Stevin.

Simon Stevin (1548—1620) hat ein Werk über Statik geschrieben: Beghinselen der Weegkonst, Leyden 1585. Es ist von Snellius 1608 wörtlich ins Lateinische übersetzt worden; die geringfügigen Abweichungen sind immer angeführt, sodaß man berechtigt ist, die lateinische Ausgabe zu zitieren. Sie heißt: Statica, 1605 und ist der Teil IV des Sammelbandes Hypomnemata mathematica, Leyden 1608.

Das erste Buch der Statica beschäftigt sich mit der Theorie, die weiteren Bücher mit der Anwendung. Die Definitionen betreffen fast nur die Bezeichnungen, die später angewendet werden. Wichtig ist

Definition 4, eine fast wörtliche Wiedergabe der Schwerpunktsdefinition des Pappus[40]).

Stevin bringt dann Postulate. Die Vorrede dazu ist sehr wesentlich: „Manche Prinzipien der Wissenschaft sind durch communes notiones bekannt und bedürfen keines Beweises; andere aber sind dunkler und mehr versteckt, bieten so den Spöttern Gelegenheit, diese Materie zu verhöhnen. Diese Prinzipien dürfen aber keineswegs verlacht oder beargwöhnt werden; daher postulieren wir nach Art der Mathematiker, ehe wir uns an die Lehrsätze begeben, daß uns jene Prinzipien zugestanden werden".

Das erste Postulat ist identisch mit Archimedes P_1. Das 3. Postulat fordert die Verschiebbarkeit eines Gewichtes in der Vertikalen, ist also auf den Fall des stabilen Gleichgewichtes zugeschnitten. Das 5. Postulat fordert, daß alle Vertikalen als parallel betrachtet werden dürfen, da die Konvergenz der Schwerelinien zum Erdmittelpunkt erst bei sehr großem Hebel in Betracht komme.

Der erste Satz ist der Hebelsatz. Ich bringe ihn ausführlich, da er für Stevins Methode außerordentlich typisch ist.

1. Proposition.

„Von zwei Gewichten, die im Gleichgewicht sind, hat das schwerere zum leichteren jenes Verhältnis, welches der längere Radius zum kürzeren hat".

1. Beispiel; es ist ein einfaches Zahlenbeispiel an einem homogenen Parallelepiped. Die Schwerpunkte und Gewichte der Teile sind wegen der Homogenität aus Symmetriegründen bekannt; durch Übergang von der Schwerpunkts- zur Gleichgewichtsaussage ist die Behauptung erwiesen. „Damit dies aber nicht mehr durch Zufall als durch solide Wissenschaft so erscheint, werden wir einen mathematischen Beweis beifügen".

2. Beispiel. Wieder ein Parallelepiped, diesmal aber in einem beliebigen Punkte der Achse durch eine Ebene parallel der Basis geteilt. Wieder sind wegen der Homogenität die drei Schwerpunkte M, K, L bekannt, Vertauschung von Gleichgewichts- und Schwerpunktsaussage. Durch eine elementargeometrische Rechnung ($KI = ML$ und $IL = KM$) ist dann auch für dieses Parallelepiped der Satz bewiesen. „Vielleicht wird jemand etwas hiergegen einwenden, daß zwar der Lehrsatz bei den Abschnitten dieser columna aequabilis gravitatis (Parallelepiped von ho-

Fig. 17.

[40]) S. oben S. 568.

mogenem Gewicht) von mir gezeigt sei, daß man aber noch nicht wisse, ob die Wahrheit auch bestehe bei anderen verschiedenen Abschnitten irregulärer Figuren von inaequabilis materia. Daher wollen wir die Allgemeinheit des Lehrsatzes noch folgendermaßen zeigen".

Beide Teile werden in ihren Schwerpunkten aufgehängt und vertikal verschoben, wodurch die Schwere nach Postulat 3 nicht verändert wird, sodaß die Teile auch jetzt noch im Gleichgewicht sind. „Danach bringen wir die beiden Segmente in eine beliebige Figur, wir nehmen an, daß die Materie Wachs oder Töpfererde oder sonstwie bearbeitbar sei. Das jugum KL[41]) behält seine Lage. Also folgt, daß die Segmente im Gleichgewicht bleiben, da die Veränderung der Form keine Veränderung der Schwere nach sich zieht, sofern die Materie dieselbe bleibt". Jetzt kann man noch für das linke Blei, für das rechte Holz von gleichem Gewicht wie vorher nehmen. „Daß das jugum seinen Platz behält, die beiden Massen im Gleichgewicht sind und die radii im gleichen Verhältnis stehen, kann niemand bezweifeln".

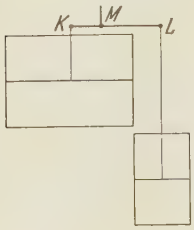

Fig. 18.

An Beispielen wird zuerst der körperliche Wagebalken mit Hilfe des Superpositionsprinzips der Gleichgewichte erledigt. Mit Hilfe des Strahlensatzes wird nachgewiesen, daß der Hebelsatz auch für nichthorizontale Hebel gilt, also im Falle des indifferenten Gleichgewichts. Weiterhin betrachtet Stevin jedoch nur horizontale Hebel, wenn er mit dem Superpositionsprinzip die Unterstützung irgend eines Gewichtes durch die eines Hebels ersetzt. Dies kommt von seiner Definition der „Kraft" am Hebel, die wie bei Ubaldo gleich dem Gewicht ist.

Stevin hat die Ableitung des Archimedes noch äußerlich verstanden. Nur ist für ihn das 6. Axiom des Archimedes kein Postulat mehr, sondern eine so evidente Wahrheit, daß es wohl keinen gibt, der daran zweifeln könnte. Diese Tatsache ist für ihn wesentlich, denn dadurch braucht er all seine Sätze nur für das geometrisch so einfache Parallelepiped abzuleiten. Später kann er dies dann immer durch ein beliebig geformtes Äquivalent an gleicher Masse mit Beibehaltung des Schwerpunktes ersetzen, was auf P_6 hinauskommt. Eine geringe Verschiedenheit gegen die Beweisanordnung des Archimedes ist, daß er die Masse kontinuierlich auf ein Parallelepiped verteilt, statt sie wie Archimedes diskret aufzuhängen. Dadurch erledigt Stevin den inkommensurablen Fall gleich mit, während Archimedes den größten gemeinsamen Teiler der beiden vorgegebenen Größen als Einheit für seine diskontinuierliche Massenverteilung braucht. Die Stevinsche Anord-

[41]) d. h. der in Betracht kommende Hebel.

nung finden wir bei Galilei wieder. Sie wird von Lagrange und Mach als eine Vereinfachung gegen Archimedes empfunden, ist aber unwesentlich. Denn die Ersetzung dieser einmal kontinuierlich, das andere Mal diskret verteilten Hilfsmassen durch die an sich vorgegebenen Gewichte erfolgt bei beiden Ableitungen nach dem inhaltlich gleichbedeutenden Axiom oder Naturprinzip.

Stevin arbeitet weit mehr mit den Begriffen von Evidenz als Archimedes. Er benutzt auch alle Hilfsmittel, die jener zu seinen Schlüssen braucht, nur trifft er die Auswahl seines ausdrücklich angeführten Postulatensystems nach einem anderen Prinzip, nämlich nach den Schattierungen an Evidenz, nicht aber aus der Einsicht[42]), daß ein Axiomsystem lückenlos sein und jeden Schluß logisch decken muß.

Der antike Stil ist bei Stevin schon weitgehend zur bloßen Form und Aufmachung geworden. Er arbeitet zwar keineswegs mit dem Begriff „Moment", sondern benutzt die Proportionenrechnung, und für seine Schwerpunktsbestimmungen verschiedener Körper die exhaustive Methode der Alten. Dabei läßt er aber die beliebig kleine Größe ε nicht im Endlichen gegen Null wandern, sondern setzt sie exakt gleich Null. Ferner arbeitet er weitgehend mit Zahlenbeispielen.

Im ganzen ist also Stevin ein außerordentlich instinktiv vorgehender Forscher gewesen, der zwar die griechischen Beweise noch äußerlich verstand, nicht aber mehr den tieferen Sinn dieser Methode. Im Grunde arbeitet er mit Naturgesetzlichkeiten, die als Ursachen der Geschehnisse anzusehen sind, wenn er sie auch nicht allgemein ausspricht, sondern immer nur im speziellen Fall benutzt. Unsere Darstellung befindet sich hier also mit Machs Ausführungen über Stevins für die Wissenschaft so fruchtbare Anwendung instinktiv erkannter Prinzipien im Einklang.

§ 6. Galilei.

Von den Werken Galileis (1564—1642) sind zwei für unsere Untersuchung wesentlich.

1. Eine zu Vorlesungszwecken von ihm ausgearbeitete Betrachtung der Maschinen und der ihnen zu Grunde liegenden Prinzipien. Dieses Werk heißt „Le Mecaniche"; es wird auf die Jahre 1594—1598 datiert und ist das Hauptwerk für Galileis Theorie der Statik. Editione nazionale II S. 147—191.

2. Am Anfang des 2. Tages der berühmten Discorsi, die 40 Jahre später erschienen sind, ist derselbe Beweis des Hebelsatzes noch einmal zu finden. Editione nazionale VIII S. 152—154.

In der Einleitung zu „Le Mecaniche" spricht Galilei scharf gegen

[42]) die für Ubaldo so charakteristisch ist

die Meinung vieler Physiker, man könne etwas gegen die Natur vornehmen, z. B. mit kleiner Kraft große Gewichte bewegen, etc.[43]). Er spricht klar als oberstes Prinzip aus, daß eine Kraft nur einen Widerstand überwinden kann, der um etwas kleiner ist als sie selbst; wenn der Widerstand größer ist, dann muß dieselbe Kraft den Weg eben des öfteren zurücklegen, d. h. was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg oder Zeit wieder verloren. Es ist dies für ihn ein unabänderliches Naturprinzip, wie er klar ausspricht.

In den darauf folgenden Definitionen bestimmt er die Schwere als abhängig von der Menge an Materie, aus der der Körper besteht. Das Moment wird definiert als impetus nach unten zu gehen; es ist zusammengesetzt aus Schwere, Position (z. B. Abstand vom Unterstützungspunkt) und anderem, wodurch eine solche Neigung verursacht werden kann. Galileis Schwerpunktsdefinition ist die des Commandino (s. oben S. 568). Ferner postuliert er, daß die Schwere des Körpers im Schwerpunkt konzentriert wirkt, und zwar auf der Vertikalen durch diesen Punkt. Schließlich postuliert er noch das erste Axiom des Archimedes, also den Fall gleicher Gewichte in gleichen Abständen vom Unterstützungspunkt (P_1). Aus diesen Postulaten will er nun den allgemeinen Hebelsatz ableiten, und zwar, wie er ausdrücklich bemerkt, aus der einen Voraussetzung des Archimedischen P_1. [Wahrscheinlich hat Mach diese Bemerkung von ihm übernommen, da er Galileis Werk sehr genau kennt.] In Le Mecaniche sagt er S. 161: „Wir werden zeigen, daß es gerade dieselbe Sache und nichts anderes ist, ungleiche Gewichte in Abständen von reziproker Proportion aufzuhängen als gleiche Gewichte in gleichen Abständen".

Galileis Beweis des Hebelsatzes ist inhaltlich völlig identisch mit dem 2. Beispiel und dem allgemeinen Beweis von Stevin. Auch Galilei betrachtet nur das stabile Gleichgewicht: die Figur ist bei ihm in Le Mecaniche ein Zylinder, in den Discorsi ein Parallelepiped wie bei Stevin. Er arbeitet genau wie Stevin mit dem üblichen Übergang von der Schwerpunkts- zur Gleichgewichtsaussage und zurück. Das 6. Archimedische Axiom ist ihm wie Stevin als so evidentes Naturprinzip gegeben, daß er es garnicht erst unter die Postulate aufnimmt, sondern meint, man brauche als einzige Annahme das P_1 des Archimedes. Der Wortlaut für das Äquivalent des 6. Archimedischen Axioms lautet bei ihm: „Denn die Figur ist von zufälliger Qualität und unfähig, die Schwere zu ändern, was höchstens von der Quantität abhängt" (Le Mecaniche S. 163).

„Daran wird wohl keiner zweifeln können, weil es eine zu offen-

[43]) So hatte es Pseudo-Aristoteles formuliert (Bekk. 847a ff.).

sichtliche Sache ist, daß eine Figur sich nicht an Gewicht ändert, falls sie dieselbe Quantität an Materie enthält" (Discorsi S. 154).

Daß die kontinuierliche Verteilung der Hilfsmassen nur ein geringfügiger Unterschied gegen die diskrete Anordnung bei Archimedes ist, habe ich bei Stevin ausgeführt. Auch Galilei benutzt zu seinem Beweis alle Schlüsse des Archimedes, nur geht ein Teil der Archimedischen Axiome jetzt unter anderem Namen.

Als Unterschied gegen Stevin ist zu bemerken, daß Galilei seine evidenten Prinzipien noch weit mehr als Naturgesetzlichkeiten und prinzipielle Forschungsmittel auffaßt als jener. Er spricht sie allgemein aus; wenn irgend etwas auf sie zurückgeführt ist, dann ist es restlos erklärt und auf Ursachen zurückgeführt. So paßt der „Vorwurf" des Descartes[44]), Galilei erkläre sehr schön, „quod ita sit", aber nicht „cur ita sit", gerade nicht auf Galilei, sondern auf Archimedes. Diese Einstellung hat Galilei nicht von Anfang an gehabt. In seiner Begeisterung für die Schönheit der mathematischen Methode des Archimedes hat er in seiner Jugend eine Abhandlung mit Schwerpunktsbestimmungen geschrieben, die völlig im antiken Lehrbuchstil gehalten ist. Diese Arbeit ist jetzt als Anhang zum 4. Tag der Discorsi erhalten. Später aber verläßt Galilei diesen Stil völlig, behält ihn auch nicht mehr als äußere Einkleidung wie Stevin, da ihm das Beschreiben mit Axiomen nicht mehr genug ist, er vielmehr erklären will.

Wenn man sich durch eigenes Lesen des Galilei-Textes von der Natürlichkeit und Eleganz seiner Überlegungen überzeugt hat, dann stimmt man mit Mach völlig überein, wenn er S. 13 sagt: „Die instinktiven Erkenntniselemente treten bei dieser Ableitung noch mehr hervor als bei jener von Archimedes" und S. 48: „Die Auffassung der schiefen Ebene durch Galilei erscheint uns viel weniger geistreich als die Stevinsche, aber wir erkennen sie als natürlicher und tiefer. Darin zeigt sich Galilei als ein so großer wissenschaftlicher Charakter, daß er den intellektuellen Mut hat, in einer längst untersuchten Sache mehr zu sehen als seine Vorgänger und seiner Beobachtung zu vertrauen. Mit der ihm eigenen Offenheit gibt er seine Ansicht samt den Motiven, die ihn zu derselben geführt haben, dem Leser preis". Diese Worte Machs sind die schönste und zutreffendste Würdigung Galileis, die ich kenne.

§ 7. Huygens.

Von Huygens (1629—1695) existieren zwei Arbeiten, in denen er Vorschläge zur Verbesserung des Archimedischen Axiomsystems für

[44]) s. Duhem I S. 12.

den Hebelsatzbeweis bringt, welches seiner Meinung nach eine Lücke enthält. Die erste Arbeit stammt vom 16jährigen Huygens aus dem Jahre 1645 und heißt „Mechanica elementa", in der Nationaledition der Oeuvres Bd. XI S. 34—36. Diese Überlegungen sind durch seine zweite Darstellung überholt, daher wollen wir uns nur mit dieser beschäftigen[44a]). Sie heißt „Démonstration de l'équilibre de la balance", ist im Jahre 1693 in Paris erschienen in: „Divers ouvrages de Mathématique et de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences" S. 313—316[45]).

Huygens sagt in seiner Arbeit: „In dem Beweise, den Archimedes vom Fundamentalsatz der Mechanik gegeben hat, setzt er stillschweigend etwas voraus, das man mit einigem Recht anzweifeln kann, nämlich: wenn mehrere gleiche Gewichte an einer Wage in je gleichen Abständen von einander hängen, sei es, daß alle sich auf derselben Seite des Unterstützungspunktes befinden, oder daß noch einige auf die andere Seite hinüber reichen wie in dieser Figur, wo *A* der Unterstützungspunkt ist, dann haben diese Gewichte die gleiche Kraft, die Wage herunterzuziehen, als ob sie alle in dem Punkte hingen, wo ihr gemeinsames Schwerezentrum ist, wie es hier der Punkt *B* ist. Wenn sie also zuerst getrennt dem Gegengewicht *C* das Gleichgewicht hielten, täten sie es auch noch, wenn sie alle am Punkt *B* hingen, oder an ihrer Stelle ein Gewicht *D*, das der Schwere aller gleich ist"[46]).

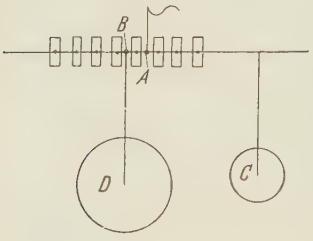

Fig. 19.

„Einige Geometer haben diesen Beweis ein wenig verändert und versucht, seinen Mangel weniger fühlbar zu gestalten. Aber ich habe keineswegs gefunden, daß sie ihn aufgezeigt hätten. Ich habe also versucht, auf andere Weise denselben Satz folgendermaßen zu beweisen".

„I. Man postuliert mit Archimedes, daß zwei gleiche Gewichte am Ende gleicher Arme einer Wage aufgehängt sich das Gleichgewicht halten" (1. Teil von P_1).

„II. Wenn die Gewichte gleich sind und die Arme der Wage, an denen sie angebracht sind, ungleich, dann soll sie sich nach der Seite des längeren Armes neigen" (2. Teil von P_1).

„III. Verlangt man noch, man könne erreichen, daß die Linien und die Ebenen, von denen in diesem Beweis die Rede ist, undurchbiegbar und ohne Gewicht sind".

[44a]) Es bleibt an der ersten Arbeit bemerkenswert, daß auch hier schon zum Zwecke des Beweises die lineare (eindimensionale) Betrachtungsweise verlassen wird.

[45]) Sie findet sich auch in älteren Sammelausgaben, z. B.: Christiani Hugenii opera varia, Lugduni Batavorum 1724, Bd. 1, pag. 282—286 unter dem Titel „demonstratio aequilibrii bilancis". — Es ist offensichtlich, daß es diese 2. Arbeit ist, die Mach ohne Angabe eines Zitates bespricht. Die Nationaledition der Werke von Huygens ist noch nicht bis zu diesem Jahrgang gediehen. Auch Lagrange erwähnt diese Arbeit in der ersten Auflage seiner Mécanique analytique von 1788, auf die sich Mach beruft, nicht; zufällig habe ich das Zitat der Arbeit in der 2. Auflage der Mécan. anal. von 1811 gefunden.

[46]) Diese Formulierung ist ein Mittelding zwischen der exakten Gleichgewichtsaussage des „Spezialfalles von P_6" und dem verschwommenen „Archimedischen Axiom"

Satz I. „Wenn man auf eine horizontale Ebene, die längs einer sie in zwei Teile teilenden geraden Linie gestützt wird, irgendwo ein Gewicht legt, dann ist die Kraft, die dieses Gewicht hat, um die Ebene auf seiner Seite herabzudrücken, größer, als wenn man es näher an die besagte Linie gelegt hätte". Er macht Gewicht G gleich Gewicht F, $GH = FH$. G und F sind im Gleichgewicht (I, also P_1); Gewicht F wird nach E gebracht, die sonst gewichtslose Ebene neigt sich alsdann nach E (II, also P_1) wie ein eindimensionaler Wagebalken.

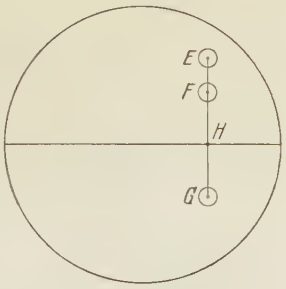

Fig. 20.

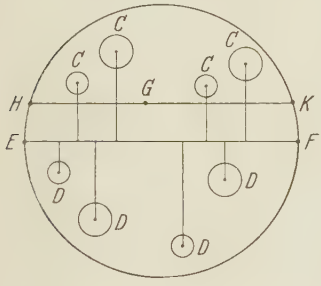

Fig. 21.

Satz II. „Wenn eine horizontale Ebene mit mehreren Gewichten beladen im Gleichgewicht bleibt, falls man sie längs einer sie in zwei Teile teilenden Geraden unterstützt, dann liegt der Schwerpunkt der so beladenen Ebene auf derselben Geraden".

Schon dieser Satz an sich genommen ist bemerkenswert. Präzisiert er doch zum ersten Mal als Theorem denjenigen Tatbestand, der der Pappusdefinition stillschweigend zugrundegelegt ist (vgl. S. 568, Anm. [29]) sowie S. 570 ff.). Die Art, wie dieses Theorem hernach zur Pointe des Beweises von Satz III gemacht wird, zeigt Huygens als subtilen Logiker.

Nun der Beweis. Voraussetzung: bei der Unterstützung der Ebene längs der Geraden EF herrscht Gleichgewicht. Behauptung: der Schwerpunkt G liegt auf EF. Gesetzt, G läge nicht auf EF. Bei jeder durch G gelegten Geraden müssen sich nun die Gewichte auf beiden Seiten das Gleichgewicht halten (dies ist S_3, in sinngemäßer Ausdehnung auf unterstützende Geraden[47]), also auch bei der Parallelen HK zu EF. Hierin erblickt Huygens den Widerspruch: „Deswegen werden die Gewichte C, C den Gewichten D, D Gleichgewicht halten, wenn die Ebene von der Geraden HK unterstützt wird. Dies kann nicht geschehen, da sie im Gleichgewicht bleibt, wenn sie von der Geraden EF unterstützt wird; denn es ist offenbar, daß alle Abstände der Gewichte auf der einen Seite vermindert sind, nämlich der

[47]) Nach S_3 ist nämlich das gesamte Gewichtsystem im Gleichgewicht, wenn es in seinem Schwerpunkt G unterstützt wird. Daß die Unterstützung längs einer ganzen durch G gehenden Geraden, also die Unterstützung weiterer schon in Ruhe befindlicher Punkte, am Gleichgewicht nichts ändert, ist nur eine sehr geringfügige Ausdehnung von S_3.

Gewichte C, C und folglich auch die Wirkung ihrer Schwere: und daß die Abstände der entgegengesetzten Gewichte D, D vermehrt sind und gleichzeitig die Wirkung ihrer Schwere, derart, daß die letztgenannten Gewichte die Ebene nach ihrer Seite hin neigen werden, und umsomehr, wenn eines oder mehrere Gewichte C, C auf der anderen Seite der Linie HK sind".

Huygens stützt seinen Widerspruchsbeweis ersichtlich auf den vorangestellten Satz I. Aber dieser ist in Wahrheit zu eng für den Zweck, dem er hier zu dienen hat, da er nur gleichschwere Gewichte betrifft, deren Verbindungsgerade von der auf ihr senkrechten Unterstützungsgeraden halbiert wird. Der Begriff einer „vis ad deflectendum planum", der dem Momentenbegriff nahesteht, soll wohl andeuten, daß Huygens der Evidenz von Satz I die hierzu nötige Ausdehnung erteilen will. Wenn man das, was Huygens hier einer Evidenz entnimmt, logisch zu präzisieren versucht, so ist es ein Postulat, das weder ein Teil von P_6 ist noch sich etwa aus P_1, P_6, P_4 ableiten läßt, sondern ein gänzlich anderes Postulat, das man in Analogie zu P_1 etwa so formulieren kann:

H. „Befinden sich zwei Massen, die in einem Punkte ihrer Verbindungsgeraden unterstützt sind, im Gleichgewicht und verschiebt man den Unterstützungspunkt nach der Seite der einen Masse, so tritt Neigung nach der Seite der anderen Masse ein".

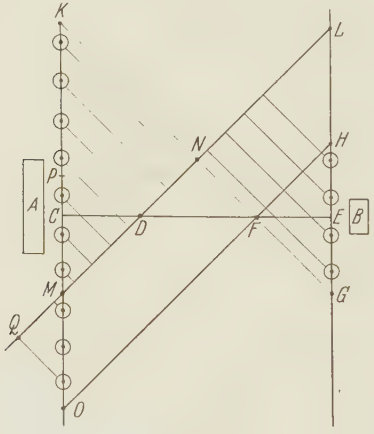

Fig. 22.

Satz III. „Zwei kommensurable Schweren (pesanteurs) an den Enden von Wagearmen aufgehängt bleiben im Gleichgewicht, wenn diese Arme im umgekehrten Verhältnis der Schweren stehen".

Voraussetzung: A und B sind die Gewichte. $A > B$; $DE : DC = A : B$.

Behauptung: Es herrscht Gleichgewicht, wenn A in C und B in E angebracht und das System in D unterstützt wird.

Beweis: Wir legen die Horizontalebene durch CE und errichten in E und C in dieser Ebene die Senkrechten auf EC. Sei $EF = CD$. Wir ziehen die Geraden GFK, MDL, die beide die Gerade CE unter 45^0 und sich gegenseitig in N unter 90^0 schneiden. Die Schnittpunkte mit den vorher gezogenen Senkrechten sind G, K und M, L. $EG = EF$; $CK = CF$. N Mittelpunkt sowohl von KG wie von ML. Die Dreiecke GNL und KNM sind kongruent. $EH = EG$, $CO = CK$.

$ED : DC = A : B = KO : HG$, also kommensurabel. KO und HG teilen wir in Teile gleich ihrem größten gemeinsamen Teiler. A und B teilen wir entsprechend. A hat so viel Gewichtsteile wie KO Streckenteile (entsprechend B und HG). Von diesen gleichen Gewichtsteilen wird je eins in die Mitte je eines der gleich langen Streckenteile von KO und HG gehängt.

Behauptung: Bei dieser Verteilung und Unterstützung in D herrscht Gleichgewicht. Wenn dies bewiesen ist, ist der ganze Satz bewiesen. Denn man kann sich ohne Störung des Gleichgewichts die ganze gewichtslose Ebene wegdenken, sodaß nur die Geraden KO, HG, beladen mit den Gewichten A und B, an den Enden der Wage C und E unterstützt, übrigbleiben (zu diesem Schluß braucht Huygens das 6. Archimedische Axiom, und zwar einen anderen Spezialfall als Archimedes, denselben, den Pseudo-Euklid benutzt).

Um nun zu zeigen, daß die verteilt beladene Ebene im Gleichgewicht ist bezüglich D, wird von jedem Teilgewicht das Lot auf LM gefällt. $NG = NK$. Sukzessive wird Gleichheit der entsprechend anschließenden Lote mit Hilfe ähnlicher Dreiecke gezeigt, sodaß die Gewichte auf GL genau ebensovielen auf KO einzeln das Gleichgewicht halten bezüglich der Geraden ML (wäre mit Satz I zu rechtfertigen). Die übrigbleibenden Gewichte auf KM sind entsprechend unter einander im Gleichgewicht bezüglich ML, da M die Strecke OP halbiert. Also ist auch die gesamte Menge auf KO im Gleichgewicht bezüglich ML mit der gesamten Menge auf LG (Superpositionsprinzip). Also herrscht auch bei Unterstützung der Ebene längs ML Gleichgewicht. Nach Satz II liegt der Schwerpunkt der Ebene also in dieser Linie. „Aber dieser Schwerpunkt liegt auch in der Linie CE, denn es ist evident, daß die Ebene im Gleichgewicht ist bei Unterstützung längs dieser Geraden. Also muß es der gemeinsame Punkt D sein. Daraus folgt dann die Wahrheit des Theorems“. (Es herrscht Gleichgewicht auf LG bei Unterstützung in E nach P_1 und dem Superpositionsprinzip, ebenso auf KO bei Unterstützung in C, also im ganzen auch bei Unterstützung durch die Gerade CE.)

Die logische Analyse dieses Beweises ergibt, daß Huygens hierbei zweierlei benutzt: 1. Satz I und damit diejenigen Evidenzen, auf die er den Beweis von Satz II gestützt hatte, und 2. den Spezialfall von P_6, auf dem auch der ihm unbekannte Hebelbeweis bei Pseudo-Euklid beruht. Was Satz II betrifft, so ist damit scheinbar H und P_6 benutzt, und zwar P_6 in seiner allgemeinen Gestalt. Bei genauerer Betrachtung stellt sich die logische Bilanz des Huygensschen Beweises günstiger dar. Denn beachtet man, auf welche speziellen Massensysteme Satz II beim Beweise von Satz III angewendet wird, so be-

merkt man leicht, daß Satz II für diese speziellen Massensysteme bewiesen werden kann, ohne II und P_6 heranzuziehen. Denn die K nächstgelegene Masse auf KO und die ihr gleiche G nächstgelegene Masse auf GL haben N zum Mittelpunkt ihrer Verbindungslinie, also auch zum Gesamtschwerpunkt ihrer vereinigten Massen (Satz 4 bei Archimedes), und ebenso die anschließenden Massenpaare auf KO und GL; ebenso haben die restlichen Massen paarweise ihren Schwerpunkt in M; das Superpositionsprinzip ergibt dann, daß der Gesamtschwerpunkt auf der Geraden MN liegt, wie zu beweisen (S_2). In Wahrheit bleibt also das einzige, was Huygens bei seinem Beweise wirklich nötig hat, derjenige Spezialfall von P_6, den auch Pseudo-Euklid benutzt und der sich von dem bei Archimedes benutzten Spezialfall dadurch unterscheidet, daß die äquidistanten Gewichte nicht im Wagebalken angeordnet sind, sondern senkrecht dazu.

Es muß jedoch hervorgehoben werden, daß Huygens selbst eine solche logische Analyse der zugrundeliegenden Axiome ferngelegen hat, so scharfsinnig an sich das Arrangement seiner Sätze ist. Denn sonst wären ihm die Bemerkungen, die wir eben gemacht haben, nicht entgangen und er hätte es vermieden, Satz II in so allgemeiner Form hinzusetzen. Er benutzt von den Archimedischen Axiomen nicht nur diejenigen, die er eingangs ausdrücklich aufgeführt hat, sondern auch weitere dauernd; er vermeidet sichtlich die Pappusdefinition in deutlichem Gegensatz zu Ubaldo. Aber er hat entdeckt, daß bei Archimedes hier eine Lücke (defectus) vorliegt, nämlich der „Spezialfall von P_6", und er sucht nun nach einer „evidenteren" Annahme, die diese Lücke ausfüllen könnte. Der Übergang vom linearen Wagebalken in die zweidimensionale Ebene stellt seinen Beweis mit dem von Pseudo-Euklid in eine Linie. Würde dieser Übergang in die höhere Dimension bewirken, daß jeder Spezialfall von P_6 überflüssig wird - etwa wie der Beweis des ebenen Desarguesschen Satzes projektiv möglich wird, wenn man in die 3. Dimension geht — so wäre dieser Übergang ein wichtiger Fortschritt. Aber das leistet er weder bei Huygens noch bei Pseudo-Euklid.

Wichtig für uns ist, daß Huygens unter den von Mach behandelten Autoren der erste ist, der von einer Lücke bei Archimedes spricht. Hier dürfte die Wurzel der von nun ab herrschenden Meinung liegen, daß Archimedes einen „Fehler" begangen habe. Allerdings ist die Auffassung, die Mach von dem Fehler des Archimedes hat, eine ganz andere, und er beanstandet den Huygensschen Beweis genau so und stellt ihn mit dem Archimedischen in eine Linie, insofern auch hier der Versuch gemacht werde, aus nichts etwas zu beweisen. Mach referiert den Huygensschen Beweis von Satz III, ohne die beiden

vorangehenden Sätze und die vorausgeschickten Axiome zu erwähnen. Daß er von einer kontinuierlichen Masse statt von diskreten Massen redet, und daß er das Arrangement des Beweises wesentlich umstülpt, möge nur die Freiheit seiner Wiedergabe charakterisieren. Dort, wo Huygens seinen Spezialfall von P_6 benutzt, erhebt Mach keinerlei Einwand; vielmehr versucht er dem Leser durch eine besonders anschaulich gezeichnete Figur darüber hinwegzuhelfen. Was Mach seinerseits beanstandet, ist etwas ganz anderes, nämlich die Stelle am Schluß, wo Huygens seinen Satz II benutzt, um zu schließen, daß der Schnittpunkt der beiden Geraden CE und ML der Schwerpunkt ist. Mach sagt: „Der Fehler entsteht auch erst durch den Schluß: wenn für zwei Axen der Ebene Gleichgewicht besteht, so besteht es auch für jede andere, durch deren Durchschnittspunkt geführte Axe“ und sucht seine Unzulässigkeit durch eine eigene Überlegung in modernen mathematischen Begriffen darzutun. Nun hat doch aber Huygens eben diesen Schluß begründet, indem er durch seinen Satz II von der Gleichgewichtsaussage zur Schwerpunktsaussage übergegangen ist. Wenn Mach dagegen Einwendungen hatte, hätte er den Punkt angeben müssen, in dem er den Beweis von Satz II beanstandet. Es scheint aber, daß Mach Satz II überhaupt nicht beachtet hat, sondern nur in Satz III und seinen Beweis, der unmittelbar den Hebelsatz betrifft, eingeblickt hat. Huygens hat es hier nämlich ebenso gemacht, wie Archimedes und überhaupt die Griechen zu tun pflegten: er hat nicht explizite gesagt, daß er hier Satz II anwendet, sondern hat vorausgesetzt, daß der Leser ihn noch in Erinnerung hat. Zusammenfassend muß man sagen, daß man aus Machs Darstellung eine irreführende Vorstellung von dem Huygensschen Gedankengang erhält, daß dieser, wie unsere Analyse ergeben hat, an der von Mach beanstandeten Stelle schließlich garnicht beanstandet zu werden braucht, und daß der „defectus“ an einer anderen Stelle liegt.

§ 8. **Lagrange.**

Die „Mécanique analytique“ von Lagrange (1736—1813) ist in erster Auflage 1788 erschienen. In der Vorrede will Lagrange alle in der Statik benutzten Prinzipe in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit und Verknüpfung aufzeigen. Er reduziert sie auf drei, das Prinzip des Hebels, das der Zusammensetzung der Kräfte und das der virtuellen Geschwindigkeiten.

Er bespricht zuerst den Archimedischen Beweis des Hebelprinzips. „Archimedes nimmt dieses Prinzip im Fall der gleichen Gewichte in gleichen Abständen vom Unterstützungspunkt als ein von selbst evidentes Axiom der Mechanik, oder wenigstens als ein Prinzip der Erfahrung“. Lagrange schildert nun den

Beweisgang des Archimedes genau und korrekt (allerdings ohne P_6 in seiner Bedeutung zu erkennen).

Danach sagt er: „Einige Moderne, wie Stevin in seiner Statik und Galilei in seinen Dialogen über die Bewegung haben die Demonstration des Archimedes vereinfacht durch die Voraussetzung, daß die am Hebel angebrachten Gewichte zwei horizontale Parallelepipeda seien, aufgehängt in ihrer Mitte, von gleicher Breite und Höhe, deren Längen aber das Doppelte der Hebelarme betragen, die ihnen invers entsprechen. Denn auf diese Weise sind die beiden Parallelepipeda im umgekehrten Verhältnis ihrer Hebelarme, und zugleich schließen sie so an einander an, daß sie nur ein einziges bilden, dessen Mittelpunkt genau dem Unterstützungspunkt des Hebels entspricht. Andere haben dagegen geglaubt, Lücken (défauts) in der Demonstration des Archimedes zu finden, und sie haben sie nach verschiedenen Seiten gedreht, um sie strenger zu gestalten. Aber wenn man Huygens ausnimmt, ist keiner dabei, der in diesem Punkt die Anerkennung der Geometer verdient hätte. Die Demonstration von Huygens ist auf die Betrachtung des Gleichgewichtes einer Ebene gegründet, die beladen ist mit mehreren gleichen Gewichten und unterstützt längs einer Geraden; aber diese Demonstration scheint, obgleich ingeniös und frei von den Fehlern, denen die des Archimedes unterworfen ist, noch nicht sicher vor jedem Einwand zu sein".

Dies ist alles, was darüber in der von Mach allein zitierten Auflage von 1788 steht. Mach erläutert den Gedankengang Lagranges durch eine Figur, ohne zu erwähnen, daß er sie selbst hinzugefügt hat. Er verwischt dadurch einen Grundzug der Darstellungsweise Lagranges, den dieser selbst mit den Worten kennzeichnet:

„Man findet keine einzige Figur in diesem Werke. Die Methoden, die ich hier auseinandersetze, brauchen keine Konstruktionen noch geometrische oder mechanische Überlegungen sondern nur algebraische Operationen, einem regulären und uniformen Plan unterworfen. Die Liebhaber der Analysis werden mit Freude sehen, daß hierdurch die Mechanik ein neuer Zweig von ihr geworden ist, und werden mir Dank wissen, ihren Bereich so erweitert zu haben".

Machs Angaben S. 13 kann ich mir nicht anders erklären, als daß er Lagranges Auseinandersetzung von Stevins und Galileis Beweisen als Lagranges eigene Meinung angesehen hat. Denn auch in der 2. Auflage steht sonst nichts, was mit Machs S. 13 Ähnlichkeit hätte: vielmehr steht hier eine eigene Betrachtung von Lagrange, die von Mach nicht erwähnt wird, und der wir uns jetzt zuwenden.

In der 2. Auflage von 1811 bringt Lagrange seine Erklärung des Stevin-Galileischen Beweises wörtlich wie in der ersten Auflage. Seine Besprechung des Huygensschen Beweises ist nun eingehender als vorhin. Er schildert Huygens' Gedankengang so, wie wir ihn auch kennen gelernt haben. Das von Huygens angeführte „Archimedische Axiom" nennt Lagrange „cette supposition précaire". Nach Schilderung von Huygens' Beweisgang fährt Lagrange fort:

„Diese Demonstration ist ingeniös, aber sie füllt nicht ganz das aus, was man in der Tat an der des Archimedes vermissen kann. Das Gleichgewicht eines geraden und horizontalen Hebels, dessen Enden mit gleichen Gewichten belastet sind, und dessen Unterstützungspunkt in seiner Mitte ist, ist eine durch sich selbst evidente

Wahrheit, weil es keinen Grund gibt, daß das eine Gewicht mehr vermöge als das andre, da auf beiden Seiten des Unterstützungspunktes alles völlig gleich ist. Es verhält sich aber nicht ebenso mit der Voraussetzung, daß die Belastung des Unterstützungspunktes gleich der Summe der beiden Gewichte ist. Es scheint, daß alle mécaniciens dies als ein Resultat der täglichen Erfahrung genommen haben[48]), die lehrt, daß das Gewicht eines Körpers nur von seiner totalen Masse abhängt und keineswegs von seiner Figur. (D'Alembert ist, glaube ich, der erste, der diese Voraussetzung zu beweisen suchte; aber die Demonstration, die er dazu in den „Mémoires de l'Académie des Sciences" von 1769 gab, ist nicht völlig befriedigend[49]). Diejenige, die Herr Fourier inzwischen im 5. Heft des „Journal de l'École Polytechnique" gegeben hat, ist streng und sehr ingeniös; aber sie ist nicht aus der Natur des Hebels gezogen[50]).) Man kann nichtsdestoweniger diese Wahrheit aus der ersten ableiten, indem man wie Huygens das Gleichgewicht einer Ebene in Bezug auf eine Linie betrachtet.

Dafür braucht man sich nur ein ebenes Dreieck vorzustellen, mit zwei gleichen Gewichten an den beiden Enden seiner Basis belastet, und mit einem doppelten Gewichte an seiner Spitze. Diese Ebene wird offensichtlich im Gleichgewicht sein, wenn man sie längs einer Geraden oder festen Achse unterstützt, die durch die Mitte der beiden Dreiecksseiten hindurchgeht. Denn man kann jede dieser Seiten als einen Hebel ansehen, in seinen Enden mit zwei gleichen Gewichten belastet, der seinen Unterstützungspunkt auf der Achse hat, die durch seine Mitte geht. Indessen kann man dies Gleichgewicht auch auf eine andere Weise betrachten, nämlich die Basis selbst des Dreiecks als einen Hebel, dessen Enden mit zwei gleichen Gewichten belastet sind; außerdem stellt man sich einen transversalen Hebel vor, der die Spitze des Dreiecks mit der Mitte seiner Basis in T-Form verbindet, dessen eines Ende mit dem doppelten Gewicht, das ja an der Spitze hängt, belastet ist, dessen anderes Ende aber als Unterstützungspunkt für den Hebel dient, der die Basis bildet. Es ist evident, daß dieser letzte Hebel in Bezug auf den transversalen Hebel im Gleichgewicht ist, der ihn in seiner Mitte unterstützt, und daß dieser folglich im Gleichgewicht ist in Bezug auf die Achse, auf die bezogen die Ebene schon im Gleichgewicht ist. Nun aber geht die Achse, da sie durch die Mitte der beiden Dreiecksseiten geht, auch notwendig durch die Mitte der Geraden, die man von der Spitze zur Mitte der Dreiecksbasis zieht. Also hat der transversale Hebel seinen Unterstützungspunkt in seinem Mittelpunkt und wird folglich an seinen Enden gleich belastet sein. Also wird die Last, mit der der Unterstützungspunkt jenes Hebels belastet ist, der die Basis des

[48]) Dieselbe „Erfahrungstatsache" will auch Hölder („Die mathematische Methode", 1924, S. 42—43) zum P_1 des Archimedes hinzunehmen, um das „Archimedische Axiom" abzuleiten. Auch er hat also nicht gesehen, daß Archimedes selbst in seinem P_6 etwas viel weiter Reichendes postuliert hatte; auch arbeitet Hölder mit der Vorstellung von „Belastung", „Kräften" und ihrer „Wirkung", s. Einleitung S. 557 und unten S. 591 592.

[49]) D'Alembert arbeitet bei seinem „Beweise" des 6. Archimedischen Axioms mit Kräften und Kräftepaaren; er macht dabei Annahmen über Symmetrie von Strecken und Asymmetrie von Richtungen, die keineswegs zwingend sind und ihm nicht zugestanden werden können.

[50]) Fourier will auch das 6. Archimedische Axiom „beweisen". Er benutzt dabei als evident, daß 3 gleiche Kräfte, die an einem Punkt in einer Ebene angreifen, und mit jeder der beiden anderen einen Winkel von 120° bilden, im Gleichgewicht sind. Er bemerkt aber nicht, daß in dieser Annahme schon das Prinzip des Parallelogramms der Kräfte enthalten ist, welches nach seiner eigenen Aussage mit dem Hebelsatz identisch ist (also erst recht das 6. Archimedische Axiom enthält).

Dreiecks bildet und an seinen beiden Enden mit gleichen Gewichten beladen ist, dem doppelten Gewicht, das an der Spitze hängt, gleich sein, also gleich der Summe der beiden Einzelgewichte. ...

Ist dieser Satz einmal aufgestellt, so ist es klar, daß man, so wie Archimedes es tut, an Stelle eines im Gleichgewicht befindlichen Gewichts an einem Hebel zwei gleiche Gewichte substituieren darf, von denen jedes gleich der Hälfte dieses Gewichts ist und die auf demselben Hebel in gleichen Abständen von dem Punkte angebracht sind, wo das Gewicht angeheftet ist; denn die Wirkung dieses Gewichts ist dieselbe wie die eines Hebels, der mit seiner Mitte am selben Punkt aufgehängt und an seinen beiden Enden mit Gewichten belastet ist, deren jedes gleich der Hälfte desselben Gewichts ist; und es ist evident, daß nichts im Wege steht, diesen letzten Hebel dem ersten derart anzunähern, daß er einen Teil von ihm bildet. Oder auch, was vielleicht strenger ist, man hat nur diesen letzten Hebel anzusehen als im Gleichgewicht gehalten von einer in seinem Mittelpunkt angehefteten von unten nach oben gerichteten Kraft gleich dem Gewicht, dessen beide Hälften an seinen Enden angeheftet vorgestellt werden; dann wird, wenn man diesen im Gleichgewicht befindlichen Hebel an dem ersten Hebel anheftet, der in Bezug auf seinen Unterstützungspunkt im Gleichgewicht vorausgesetzt ist, das totale Gleichgewicht fortbestehen, und wenn die Anheftung so vollzogen wird, daß die Mitte des zweiten Hebels mit dem Ende eines der Arme des ersten Hebels zusammenfällt, so wird man die Kraft, die den zweiten Hebel trägt, ansehen dürfen als angeheftet am Gewicht selbst, mit dem dieser Arm belastet ist und das, da es getragen wird, keine Wirkung mehr auf den Hebel ausüben wird, sondern sich also durch zwei gleiche Gewichte ersetzt finden wird, jedes gleich seiner Hälfte und zu beiden Seiten dieses Gewichts placirt auf dem verlängerten ersten Hebel. Diese Superposition von Gleichgewichten ist in der Mechanik ein ebenso fruchtbares Prinzip wie es in der Geometrie die Superposition der Figuren ist".

Wir müssen feststellen, daß Lagrange die Archimedes-Arbeit auch nicht gründlich gelesen hat, da er ja noch von dem dort angewandten „Archimedischen Axiom" spricht. Er versucht dies Axiom nun zu beweisen. Wir müssen seinen Beweisgang genau analysieren (die Figur stammt von mir). Zuerst zerlegt er das Gewicht 2 im Punkte A in die Summe $1+1$. Diese verteilt er auf zwei verschiedene Hebel. Daß der Hebel AB in D unterstützt und der Hebel AC in E unterstützt im Gleichgewicht ist, ergibt sich aus P_1 des Archimedes. Wenn Lagrange jetzt den Hebel AF betrachtet, so liegt hierin außer dem wohlbekannten Superpositionsprinzip der Gleichgewichte der Übergang von einer Gleichgewichts- zu einer Schwerpunktsaussage. Denn in F unterstützt ist BC im Gleichgewicht als Hebel mit gleichen Gewichten in gleichen Abständen vom Unterstützungspunkt. Also ist F der Schwerpunkt dieses Systems (Satz 4 des Archimedes)[51]. Welches Gewicht in F angreift, wissen wir aber noch nicht, das wollen wir ja gerade erst bestimmen. Das gesamte Gewicht der Ebene ist jetzt in den Punkten A und F vereinigt. Also

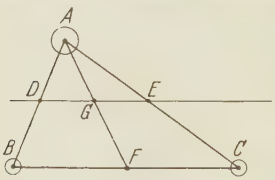

Fig. 23.

[51]) s. Stein S. 227.

muß auch dies System jetzt im Gleichgewicht sein bei Unterstützung durch die Gerade DE. Da das System jetzt aber auf der Geraden AF liegt, braucht man von der unterstützenden Geraden DE nur den Punkt G. G ist nach geometrischer Konstruktion die Mitte von AF. Jetzt wird Archimedes Satz I angewendet[52]): da die Strecken gleich sind, und da Gleichgewicht herrscht, sind die Gewichte gleich.

Soweit ist das, was Lagrange beweist, ganz exakt im Rahmen der Archimedischen Denkweise. Das Ergebnis ist: das Massensystem, das aus den beiden gleichen Massen bei B und C und der doppelt so großen bei A besteht, ändert seinen Schwerpunkt nicht, wenn man die beiden Massen aus B und C in der Mitte F der Strecke BC vereinigt. Lagrange beweist also von dem „Spezialfall von P_6", der beim Hebelbeweis nötig ist, wiederum einen ganz speziellen Fall allein aus den übrigen Axiomen heraus.

Erst an dieser Stelle tritt Lagrange aus dem Archimedischen Gedankenkreis heraus. Indem er nämlich von der „Kraft" redet, die die beiden gleichen Massen in B und C auf den Unterstützungspunkt des Hebels ausüben, setzt er stillschweigend das Axiom von der Superposition der Kräfte voraus und entnimmt daraus, daß diese beiden Massen B und C stets die gleiche Wirkung ausüben, gleichgültig von welchem Massensystem sie einen Teil darstellen. Er gewinnt also den zum Beweis des Hebelsatzes nötigen „Spezialfall von P_6", indem er die Gleichgewichtslehre in einer allgemeineren Statik aufgehen läßt und deren Axiome verwendet.

Einiges in dieser Betrachtungsweise erinnert an Pseudo-Euklid; nur daß dieser ganz im Rahmen der Gleichgewichtslehre bleibend ein Axiom formuliert hat, das ein gewisses Substrat vom Prinzip der Superposition der Kräfte darstellt, und aus dem er den ganzen Hebelsatz gewinnt. Eine ungenaue Betrachtungsweise, die aus allen vorhandenen Zeugnissen immer nur herauserkennen will, was von den heute geltenden Begriffen darin „schon enthalten ist", wird deshalb leicht zu der falschen Meinung kommen, daß der Pseudo-Euklid eine moderne Denkweise vorweggenommen habe.

Zusammenfassung.

Die Entwicklung der Statik, so weit sie sich uns im vorangehenden dargeboten hat, zeigt zwei einander durchsetzende, aber doch grundverschiedene Strömungen. Die eine, deren Exponent Archimedes ist, bezweckt den schlichten logischen Aufbau einer reinen Gleichgewichts-

[52]) s. Stein S. 226.

lehre im Sinne einer mathematischen Disziplin. Ubaldo, aufs äußerste bemüht, die logische Struktur der Sache seinen Zeitgenossen klarzulegen, mißversteht den Archimedischen Beweis des Hebelsatzes und wird dadurch zum unfreiwilligen Urheber der Legende vom „Archimedischen Axiom" und vom „circulus vitiosus".

Die andere Strömung hat ihren erkennbaren Ausgangspunkt bei Pseudo-Aristoteles und Pseudo-Euklid, denen verwandte Gedankengänge im echten Aristoteles zur Seite stehen; sie geht über die Araber, über Jordanus, Leonardo, Stevin und Galilei bis zu Lagrange und seiner Zeit. Moment und Kraftbegriff sind für sie charakteristisch.

Will man Mach gerecht werden, so muß man ihm das zubilligen, was der Historiker jedem Gegenstand schuldet: man muß ihn aus seiner Zeitlage heraus beurteilen. Unsere Analyse hat ergeben, daß Mach von einer vorgefaßten Meinung aus alles im Sinne der zweiten der beiden geschilderten Strömungen und mit der Richtung gegen die erste anschaut. Es ist nicht zu verkennen, daß in der Zeit der ersten Auflage von Machs Werk selbst eine solche einseitige Schilderung und vielleicht gerade eine solche geeignet war, auf das intuitive Denken und auf den geschichtlichen Sinn der Mathematiker und Naturwissenschaftler anregend zu wirken. Das hat Machs Schrift in reichem Maße getan.

Aber das darf nicht dazu führen, daß die heutige Zeit aus Dankbarkeit dafür seine Fehler immer weiter überliefert. Mach hat vielfach aus Darstellungen zweiter Hand gearbeitet; wo er in die Originale Einblick nimmt, sahen wir, daß er es oft zu flüchtig tat, um dabei die feste Einstellung, mit der er an den Text herantrat, zu korrigieren; häufig geht er an interessanten Dingen vorbei. Im Falle Huygens z. B. hat sich ergeben, daß der Sachverhalt des Huygenstextes ein ganz anderer ist, als er bei Mach erscheint; wesentlicher ist, daß man aus Machs Darstellung garnicht einen Eindruck davon erhält, daß Huygens ganz und gar zwischen den beiden oben geschilderten Strömungen steht und der griechischen Denkweise hier wie in anderen Schriften stark verhaftet ist.

Die psychologische Entstehung des Momentbegriffs ist ein sehr interessantes Problem, und wenn es exakter historischer Forschung einmal gelingen sollte, es ganz zu klären, so könnte es kaum einen schöneren Beitrag geben zu dem großen wissenschaftspsychologischen Programm Machs, dem wir alle verpflichtet sind.

Lebenslauf.

Ich, Dora Reimann, evangelischer Konfession, wurde am 30. Dezember 1906 zu Berlin-Rixdorf geboren als Tochter des Stadtschulrates a. D. und Oberstudiendirektors Dr. Arnold Reimann und seiner Frau Else geb. Vaßmer.

In Berlin besuchte ich von 1913—1926 die 192. Gemeindeschule, das Margarethenlyzeum, das Charlottenlyzeum und die Studienanstalt gymnasialer Richtung der staatlichen Augustaschule, die ich Ostern 1926 mit dem Zeugnis der Reife verließ.

S.-S. 1926 bis S.-S. 1928 studierte ich in Göttingen Mathematik, Physik und Chemie; W.-S. 1928 bis W.-S. 1931/32 studierte ich dieselben Fächer in Bonn.

Besonderen Dank schulde ich den Herren Professoren Bessel-Hagen, Konen und Toeplitz für Anregungen und Ratschläge bei dieser Arbeit.

Die mündliche Promotionsprüfung war am 27. Juli 1932.

Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner, Göttingen)